TERQUEM

Théorème sur les cercles osculateurs dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 21-22

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__21_1>

THÉORÈME

sur les cercles osculateurs dans les coniques.

Par tout point d'une conique passent quatre cercles osculateurs; les quatre points d'osculation sont sur une même circonférence. (Steiner.)

1. Lemme. Soient

$$Ay^2+Cx^2+Dy+Ex+F=0\,;\quad Ay^2-Cx^2+D'y+E'x+F'=0$$

les équations des deux coniques ; les axes coordonnés étant parallèles aux axes principaux, les points d'intersection des deux coniques sont sur une même circonférence.

Démonstration. Les deux équations donnent celles-ci :

$$2Cx^2+y(D-D')+x(E-E')+F-F'=0,$$
$$2Ay^2+y(D+D')+x(E+E')+F+F'=0;$$

d'où

$$2ACy^2+2ACx^2+y\,[D(A+C)+D'(C-A)]+$$
$$+x[E(A+C)+E'(C-A')]+F(A+C)+F'(C-A)=0,$$

équation d'un cercle.

Observation. Si $C=0$, le cercle devient une droite.

Observation. Le lemme renferme cet énoncé géométrique: lorsqu'une hyperbole et une ellipse ont leurs axes principaux parallèles, les points d'intersection sont sur une même circonférence.

II. Soit $Ay^2+Cx^2+Dy+Ex=0$ l'équation d'une conique, les axes coordonnés parallèles aux axes principaux; et soient x', y' les coordonnées d'un point d'osculation d'un cercle qui passe par l'origine; la droite qui passe par le point et l'origine a pour équation $yx'=xy'$, et la tangente en ce point a pour équation

$$y(2Ay'+D)+x(2Cx'+E)+Dy'+Ex'+2F=0;$$

ces deux droites sont également inclinées sur les axes principaux; donc

$$\frac{2Cx'+E}{2Ay'+D}=\frac{y'}{x'}; \quad \text{d'où} \quad 2Ay'^2-2Cx'^2+Dy'-Ex'=0;$$

et l'on a aussi

$$2Ay'^2+2Cx'^2+2Dy'+2Ex'=0;$$

donc, d'après le lemme, les quatre points d'intersection sont sur une même circonférence. Tm.