DIENGER

Note sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}dz}{1+z^n+z'^n}$, α étant >0 et $<2n$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 201-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__201_1>

NOTE

sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1+z^n+z^{2n}}$, *$\alpha$ étant* >0 *et* $<2n$,

PAR M. DIENGER,
docteur ès sciences à Sinsheim (Bade).

Si la fonction $\frac{f(x)}{F(x)}=\varphi(x)$ jouit des propriétés suivantes :

1° $\varphi(x+iy)$, i étant $=\sqrt{1}$, est 0 pour $x=\pm\infty$, quelle que soit la valeur de y, et cette même quantité est 0 pour $y=\infty$, quelle que soit la valeur de x.

2° Les racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$ sont absolument les mêmes que celles de l'équation $F(x)=0$; on sait qu'on a alors,

$$\int_{\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=2\pi i\left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{F'(x_2)}+\ldots+\frac{f(x_m)}{F'(x_m)}\right];$$

x_1, x_2, … x_m étant les racines (imaginaires) de l'équation

$F(x)=0$, pour lesquelles le coefficient de $i(=\sqrt{1})$ est positif. Si cette équation avait en même temps les racines réelles a_1, a_2, ... il faudrait ajouter à l'expression précédente :

$$\pi i\left[\frac{f(a_1)}{F'(a_1)}+\frac{f(a_2)}{F'(a_2)}+\dots\right];$$

$F'(x)$ désignant, comme à l'ordinaire, la fonction dérivée de $F(x)$. (V. les *Leçons de calcul intégral*, par M. Moigne, leç. 9 et 21.)

Appliquons maintenant ce théorème à l'intégrale :

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=[(-i)^{\mu-1}+i^{\mu-1}]\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4};$$

supposant $\mu>0$ et <4, toutes les conditions énoncées ci-dessus seront remplies. Les racines de l'équation $1+x^2+x^4=0$ sont :

$$\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3},\quad \cos\frac{4\pi}{3}\pm i\sin\frac{4\pi}{3};$$

donc on a dans ce cas :

$$x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},\quad x_2=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};$$

d'où il suit, en appliquant le théorème général :

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=$$

$$=\frac{2\pi i}{2}\left[\frac{\left(-i\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\mu-1}}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}+2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3}+\frac{\left(i\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\mu-1}}{-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3}\right]$$

$$=\pi i\left[\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\mu-1}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2}+\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\mu-1}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+4}\right]=$$

$$=2\pi i\left[\frac{\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}-i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}}{-3+i\sqrt{3}}+\frac{\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}+i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}}{3+i\sqrt{3}}\right]=$$

$$=\frac{4\pi i^2}{-12}\left[\sqrt{3}.\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}-3\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}.\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}\right].$$

Or on a : $$\sqrt{3}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}},\text{ donc}$$

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{3}.\sin\frac{\pi}{6}}\left[\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}.\sin\frac{\pi}{6}-\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}-(\mu-1)\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\mu\pi}{6}\right)=$$

$$=[(-i)^{\mu-1}+i^{\mu-1}]\int_o^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=$$

$$=\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\mu-1}+\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\mu-1}\right]\int_o^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=$$

$$=\left[\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}-i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{2}+\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}+i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{2}\right]\int_o^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=$$

$$=2\sin\frac{\mu\pi}{2}\int_o^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4},$$

d'où enfin :

$$\int_o^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\mu\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\mu\pi}{2}},\ \mu\begin{smallmatrix}>0\\<4.\end{smallmatrix}\qquad(1)$$

Supposons dans cette formule $\mu=2a$, $x^2=z$, on aura

$$x^{\mu-1}dx=x^{2a-2}xdx=z^{a-1}\frac{dz}{2},\text{ donc}$$

$$\int_o^{\infty}\frac{z^{a-1}dz}{1+z+z^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a\pi}{3}\right)}{\sin a\pi},\ a\begin{smallmatrix}>0\\<2.\end{smallmatrix}$$

Pour $a=1$, le second membre de cette équation se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; sa valeur se trouve, au moyen des formules connues $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z+z^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

ce qu'on peut aisément vérifier par l'intégration directe.

Mettons dans la formule (1) $a=\frac{\alpha}{n}\left(\alpha \begin{matrix} >0 \\ <2n \end{matrix}\right)$, $z=x^n$, on aura $z^{a-1}dz = nx^{\alpha-1}dx$, donc

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}} = \frac{2\pi}{n\sqrt{3}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)}{\sin\frac{\alpha\pi}{n}}, \ \alpha \begin{matrix} >0 \\ <2n. \end{matrix} \qquad (2)$$

Cette formule a lieu pour n entier et >0, et même pour n fractionnaire et >0, pourvu que, dans ce dernier cas, on n'admette pour x^n, x^{2n}, qui sont alors des puissances fractionnaires, que leurs valeurs positives et réelles.

Pour $\alpha=n$, le second membre de l'équation (2) est $\frac{0}{0}$, sa valeur est alors $\frac{2\pi}{3n\sqrt{3}}$, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{1+x^n+x^{2n}} = \frac{2\pi}{3n\sqrt{3}}.$$

Posons dans la formule (2) $\frac{1}{x}$ au lieu de x, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{a^{\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}}$ se transformera en $\int_0^\infty \frac{x^{2n-\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}}$; donc on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}}, \ \alpha \begin{matrix} >0 \\ <2n; \end{matrix} \qquad (3)$$

équation qui résulte immédiatement de ce qu'on a identiquement :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)}{\sin\frac{\alpha\pi}{n}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{(2n-\alpha)\pi}{3n}\right)}{\sin\frac{(2n-\alpha)\pi}{n}}.$$

Différentions l'équation (2) par rapport à α, nous aurons :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}=$$

$$=\frac{-2\pi^2}{3n^2\sqrt{3}}\frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)\sin\frac{\alpha\pi}{n}+3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)\cos\frac{\alpha\pi}{n}\right]}{\sin^2\frac{\alpha\pi}{n}}. \qquad (4)$$

Cette équation aura lieu tant que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}$ aura tous ses éléments finis, c'est-à-dire tant que la quantité $\frac{(x+\varepsilon)^{\alpha-1}\log(x+\varepsilon).\varepsilon}{1+(x+\varepsilon)^n+(x+\varepsilon)^{2n}}$ s'évanouira pour $\varepsilon=0$; x pouvant varier de $x=0$ jusqu'à $x=\infty$.

Or il est évident que la quantité $\frac{x^{\alpha-1}\log(x)}{1+x^n+x^{2n}}$ est finie pour $x\begin{matrix}>0\\<\infty\end{matrix}$; donc $\frac{(x+\varepsilon)^{\alpha-1}\log(x+\varepsilon).\varepsilon}{1+(x+\varepsilon)^n+(x+\varepsilon)^{2n}}$ s'évanouit pour $\varepsilon=0$, x étant $\begin{matrix}>0\\<\infty\end{matrix}$. Supposons donc $x=0$, on aura à discuter la quantité :

$$\frac{\varepsilon^{\alpha-1}\log(\varepsilon).\varepsilon}{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}}=\frac{\varepsilon^\alpha\log(\varepsilon)}{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}} \text{ pour } \varepsilon=0\,;$$

qui est évidemment 0 tant que $x>0$; pour $\alpha=\infty$, on pourra supposer $x+\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}$, et on aura :

$$\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).\varepsilon}{1+\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n+\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n}}=\frac{-\varepsilon^{2n-\alpha}\log(\varepsilon)}{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}} \text{ pour } \varepsilon=0,$$

qui sera 0 pourvu qu'on ait $\alpha<2n$. Il résulte de ces considérations que la formule (4) a lieu pour $\alpha \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 2n \end{smallmatrix}$, c'est-à-dire sous les mêmes conditions que l'équation (2) d'où elle dérive.

La formule (3) donne, en différentiant par rapport à α:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}},\ \alpha \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 2n. \end{smallmatrix} \tag{5}$$

Pour $n=\alpha$, on tire de l'équation (1) :

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}} = -\infty\,; \tag{6}$$

donc la formule (5) démontre que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}$ change de signe pour $\alpha=n$; elle est négative pour $\alpha \begin{smallmatrix} > 0 \\ < n, \end{smallmatrix}$ positive pour $\alpha \begin{smallmatrix} > n \\ < 2n \end{smallmatrix}$; pour $\alpha=n$, elle passe de l'infini négatif à l'infini positif (*).