NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE JUBÉ

Question proposée au concours d'admission à l'École normale en 1847

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 191-194

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__191_0>

QUESTION PROPOSÉE

au concours d'admission à l'École normale en 1847
(Voir VI, 406).

PAR M. JUBÉ (EUGÈNE),
Professeur au lycée de Saint-Omer.

On donne sur un plan un nombre quelconque de points A, B, C..., par une origine fixe O choisie à volonté sur ce plan, on mène un nombre infini de droites, et sur chacune d'elles on porte une longueur OM réciproquement proportionnelle à la racine carrée de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur cette droite des différents points A, B, C.....

On demande :

1° Le lieu des points M obtenus de cette manière ;

2° S'il est toujours possible, les points A, B, C... restant fixes, de choisir l'origine O de telle sorte que ce lieu devienne une circonférence ;

3° Examiner si la courbe cherchée est toujours fermée pour toutes les positions du point O ;

4° Lorsque cela a lieu, trouver où le point O doit être placé pour que les points A, B, C... restant fixes, l'aire totale soit la plus grande possible.

1° Prenons pour axes deux droites perpendiculaires passant par le point O, et nommons (x', y'), (x'', y''), (x''', y''')... les coordonnées des points donnés A, B, C .... L'équation d'une droite OM sera $y = \alpha x$, et la longueur de la perpendiculaire abaissée du point A sur cette droite sera $\pm \dfrac{y' - \alpha x'}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Celles des autres perpendiculaires auront des expressions analogues, de sorte que $\mathrm{OM} = \dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{(y'-\alpha x')^2+(y''-\alpha x'')^2+\ldots}}$.

Mais $\mathrm{OM} = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\alpha = \dfrac{y}{x}$, ce qui donne pour équation du lieu cherché ·

$$(y'x-yx')^2+(y''x-yx'')^2+\ldots\ldots = 1,$$

ou bien

$$x^2(y'^2+y''^2+y'''^2\ldots)+y^2(x'^2+x''^2+x'''^2\ldots)-$$
$$-2xy(x'y'+x''y''\ldots) = 1.$$

équation d'une ellipse.

2° Si, au lieu de mener les droites OM du point O, on les menait d'un autre point O′ ayant pour coordonnées a et b par rapport au système d'axes précédents, on trouverait la même équation dans laquelle y', $y''\ldots$ et x', $x''\ldots$, seraient remplacés par $y'-b$, $y''-b\ldots$ et $x'-a$, $x''-a\ldots$, de sorte que l'équation du lieu serait alors

$$x^2[(y'-b)^2+(y''-b)^2\ldots]+y^2[(x'-a)^2+(n''+a)^2\ldots]-$$
$$-2xy[(x'-a)(y'-b)\ldots] = 1.$$

Ce lieu pourra donc être une circonférence, si l'on peut disposer de a et b de manière à avoir

$$(y'-b)^2+(y''-b)^2\ldots = (x'-a)^2+(n''-a)^2\ldots,$$

et $$(y'-b)(x'-a)+(y''-b)(x''-a)\ldots = 0;$$

ou bien en nommant X et Y les coordonnées du centre de gravité des points donnés considérés comme d'égal poids, et faisant pour abréger $y'^2+y''^2\ldots = \Sigma y'^2$, $x'^2+x''^2\ldots = \Sigma x'^2$ et $x'y'+x''y''\ldots = \Sigma x'y'$, et désignant par n le nombre des points A, B, C...,

$$n(b^2-a^2)-2n\mathrm{Y}b+2n\mathrm{X}a+\Sigma y'^2-\Sigma x'^2 = 0,$$

et $$nab-2n\mathrm{X}b-2n\mathrm{Y}a+\Sigma x'y' = 0.$$

Or, si dans chacune de ces équations on considère a et b

comme coordonnées courantes, chaque équation ci-dessus appartient à une hyperbole équilatère ayant pour centre le point (X, Y), et ces deux courbes se rencontrent en deux points, puisque les axes de l'une sont parallèles aux asymptotes de l'autre. Donc, en prenant pour a et b les valeurs des coordonnées de l'un ou de l'autre de ces points, et y mettant l'origine des droites OM, le lieu cherché sera une circonférence.

3° Si les points A, B, C... étaient en ligne droite et que l'origine des droites OM fût prise sur cette droite, en prenant l'axe des y parallèles à cette ligne, on aurait $x'-a=0$, $x''-a=0\ldots$, d'où

$$x^2[(y'-b)^2+(y''-b)^2\ldots]=1$$

pour équation du lieu cherché, qui dans ce cas se réduirait à deux droites parallèles à celle des points A, B, C...

4° $Ay^2+Bxy+Cx^2=1$ étant l'équation d'une ellipse rapportée à des axes rectangulaires, si on la rapporte à ses axes a', b' on aura, comme on sait, $a'^2b'^2=\dfrac{4}{4AC-B^2}$; et pour que l'aire de l'ellipse ou $\pi a'b'$ soit maximum, il faut que $4AC-B^2$ soit un minimum.

Or, en supposant que l'origine des coordonnées est aussi celle des droites OM, nous avons obtenu pour le lieu cherché l'ellipse ayant pour équation

$$x^2(y'^2+y''^2\ldots)+y^2(x'^2+x''^2\ldots)-2xy(x'y'+x''y''\ldots)=1.$$

Prenons pour cette origine le centre de gravité des points A, B, C... ; alors $y'+y''\ldots=0$, $x'+x''\ldots=0$. Si l'origine des droites OM avait été un autre point ayant pour coordonnées a et b par rapport au système précédent d'axes coordonnés, on aurait trouvé

$$x^2[(y'-b)^2+(y''-b)^2\ldots]+y^2[(x'-a)^2+(x''-a)^2\ldots]-\\ 2xy[(x'-a)(y'-b)\ldots]=1,$$

ou bien

$$x^2(\Sigma y'^2+nb^2)+y^2(\Sigma x'^2+na^2)-2xy(\Sigma x'y'+nab)=1.$$

L'expression $4AC-B^2$ se trouve être alors

$$\Sigma x'^2 y'^2+n\Sigma(bx'-ay')^2-(\Sigma x'y')^2.$$

En désignant par $\Sigma[(bn'-ay')^2]$ la somme

$$(bx'-ay')^2+(bx''-ay'')^2\ldots\ldots,$$

cette expression est minimum pour x', y', x'', y''..... constants lorsque a et b sont nuls. Donc la courbe correspondant à l'aire maximum sera celle qu'on obtiendra en prenant pour origine des lignes OM le centre de gravité des points donnés.

Note. Cette question a aussi été traitée par M. P. Serret.