Nouvelles annales de mathématiques

Breton de Champ

Note sur une propriété des centres des courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 187-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__187_0>

NOTE

sur une propriété des centres des courbes algébriques (V. t. II, p. 210, et t. V, p. 228),

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

On démontre facilement que si deux cordes d'une section conique se coupent mutuellement en deux parties égales, leur point d'intersection est le centre de la courbe. Cette propriété est susceptible de généralisation, comme il suit.

THÉORÈME. *Si* m *droites se coupent en un point dans le plan d'une courbe algébrique de degré* m, *et que leurs rencontres réelles ou imaginaires avec la courbe soient distribuées deux à deux à égale distance de ce point, celui-ci est un centre.*

En effet, l'équation de la courbe que je suppose, pour plus de facilité, rapportée à des axes passant par le point d'intersection commun des m droites, peut être mise sous la forme rationnelle et entière :

$$u_m + u_{m-1} + u_{m-2} + \ldots + u_2 + u_1 + u_0 = 0,$$

u_i représentant l'ensemble des termes de degré i en x et y. D'après l'hypothèse de l'énoncé, si l'on pose $y = \alpha x$, on pourra trouver m valeurs α', α'', α'''... de α, qui donneront des valeurs de x égales deux à deux et de signes contraires. Or la substitution de αx à la place de y transforme l'équation ci-dessus en celle-ci :

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + u_0 = 0;$$

où le coefficient A_i de x^i est une fonction entière de α, de degré i. Pour que les valeurs de x qui satisfont à cette équation soient égales deux à deux et de signes contraires, il faut et il suffit que l'on ait $A_{m-1}=0$, $A_{m-3}=0$, $A_{m-5}=0$, etc., c'est-à-dire que les coefficients des termes de rang pair soient nuls; mais on admet que cela arrive pour m valeurs α', α'', α'''..; donc les équations $A_{m-1}=0$, $A_{m-3}=0$... qui sont toutes de degrés inférieurs à m, auraient chacune m racines, ce qui ne peut avoir lieu sans que tous leurs coefficients soient nuls; donc les fonctions u_{m-1}, u_{m-3}, u_{m-5}... de rang pair sont identiquement nulles dans l'équation de la courbe, ce qui est la condition pour que l'origine en soit le centre.

Remarques. I. On peut demander quels sont, dans le plan d'une courbe algebrique de degré m, les points par lesquels il est possible de mener $m-n$ droites jouissant de la propriété dont on vient de parler, c'est-à-dire rencontrant la courbe symétriquement à des distances égales de ce point.

Le raisonnement ci-dessus fait voir que les fonctions de α de rang pair A_{m-1}, A_{m-3}... doivent disparaître lorsque leur indice est moindre que $m-n$; celles qui sont d'un degré plus élevé ne disparaissent point, mais s'annulent pour un nombre $m-n$ de valeurs de α, inférieur à leur degré. On peut donc les mettre sous la forme

$$A_{m-1}=a_{m-1}(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha-\alpha''')\ldots$$
$$A_{m-3}=a_{m-3}(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha-\alpha''')\ldots$$

a_i étant une fonction entière de α. Or $\alpha=\frac{y}{x}$; donc $\frac{u_{m-1}}{x^{m-1}}$, $\frac{u_{m-3}}{x^{m-3}}$... sont divisibles par $\left(\frac{y}{x}-\alpha'\right)\left(\frac{y}{x}-\alpha''\right)\left(\frac{y}{x}-\alpha'''\right)\ldots$; donc aussi u_{m-1}, u_{m-3}... sont divisibles par une même fonction entière et homogène des variables x, y.

Par conséquent, la condition cherchée est que les polynômes u_{m-1}, u_{m-3}... qui ne disparaissent point, admettent un commun diviseur du degré $m-n$. Ce commun diviseur, égalé à 0, donne les $m-n$ droites, qui se comportent comme si l'origine était un centre.

Il résulte de cette théorie que de chaque point d'une ligne du troisième ordre on peut mener deux droites qui rencontrent cette ligne à égale distance de ce point.

II. Le théorème ci-dessus s'étend aux surfaces, car on voit d'abord que si d'un point on peut mener m plans qui coupent une surface de degré m suivant des courbes douées de centre, ce point est lui-même le centre de cette surface.

En effet, un plan quelconque mené par le point dont il s'agit coupera la surface suivant une courbe de degré m, et ses intersections avec les m plans donnés se trouveront dans les conditions qui forment l'objet de cet article; en d'autres termes, toute section plane de la surface sera douée d'un centre, etc. c. q. f. d.

Mais il y a plus : on peut se demander combien de droites menées d'une manière quelconque par un point, dans ces mêmes conditions, sont nécessaires pour que la surface ait un centre.

Considérons l'équation aux trois variables x, y, z.

$$u_m + u_{m-1} + \dots + u_2 + u_1 + {}_0 = 0,$$

où u_i est un polynôme homogène et entier de degré i en x, y, z. Posons $y=\beta x$, $z=\gamma x$, nous aurons :

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + u_0 = 0,$$

A_i étant une fonction de β et de γ. Il est nécessaire et il suffit que les systèmes donnés de valeurs de β et de γ soient tels que les coefficients de celles de ces fonctions qui sont de rang pair ne puissent différer de 0.

Or A_{m-1}, qui est du degré le plus élevé, renferme au plus $\frac{m(m+1)}{2}$ coefficients ; si donc on a $\frac{m(m+1)}{2}$ droites qui rencontrent la surface comme si l'origine était au centre, c'est-à-dire $\frac{m(m+1)}{2}$ systèmes de valeurs de β et de γ qui annulent A_{m-1}, A_{m-3}, A_{m-5}, etc., on aura, pour déterminer chacun des $\frac{m(m+1)}{2}$ coefficients de A_{m-1}, autant d'équations du premier degré, lesquelles seront satisfaites en général en égalant à 0 tous les coefficients, et ne pourront l'être d'aucune autre manière. A plus forte raison en sera-t-il de même des coefficients moins nombreux, de A_{m-3}, A_{m-5}, etc.

Donc $\frac{m(m+1)}{2}$ est le nombre cherché.

On suppose ici tacitement que les équations $A_{m-1}=0$, $A_{m-3}=0$, etc., ne rentrent pas les unes dans les autres, et que les systèmes de valeurs de β et γ sont en dehors des conditions toutes particulières qui pourraient faire tomber en défaut le raisonnement employé.

Pour fixer les idées, regardons β et γ comme les coordonnées d'un point. Déterminer les $\frac{m(m+1)}{2}$ coefficients des A_{m-1}, c'est faire passer une courbe du degré $m-1$ par $\frac{m(m+1)}{2}$ points donnés. Or nous savons que $\frac{m(m+1)}{2}-1$ points suffisent; donc, si le point qui est assigné au delà de ce nombre ne se trouve pas sur la courbe qui passe par les $\frac{m(m+1)}{2}-1$ premiers, tous les coefficients seront nuls.

Aux polynômes A_{m-3}, A_{m-5} correspondraient des groupes de $\frac{m(m+1)}{2}$ points, comme pour A_{m-1}; à plus forte raison les coefficients seront-ils nuls pour ces polynômes.