Nouvelles annales de mathématiques

C. G. J. Jacobi

De l'élimination de la variable entre deux équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 158-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__158_1>

DE L'ÉLIMINATION DE LA VARIABLE

entre deux équations algébriques.

Par C. G. J. JACOBI, professeur à Kœnigsberg. (Crelle, XV, 101, 1835, latin.)

—

1.

Entre les diverses méthodes d'élimination qui ont été proposées, il en est une que je me rappelle avoir lue jadis dans les ouvrages élémentaires composés par le célèbre Bezout, et qui se distingue avantageusement des autres à divers titres. Mon but est d'exposer brièvement cette méthode et d'y ajouter diverses observations (*).

Nous pouvons supposer que les deux équations sont de même ordre; car si l'une des équations est d'un ordre inférieur à l'autre, il suffira d'égaler à 0 les coefficients des puissances manquantes. Soient donc ces équations :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + a_0 = 0,$$
$$\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} \ldots + b_0 = 0.$$

(*) Les auteurs du programme d'admission à l'École polytechnique n'ont pas eu la main heureuse en choisissant parmi les méthodes d'élimination celle du p. g. c. d ; la plus mauvaise, et tellement longue, qu'on a été obligé de *proscrire* la partie essentielle, la discussion des facteurs étrangers. Ce programme aurait besoin d'être totalement remanié, car il domine et entrave l'enseignement.

Retranchant la seconde équation multipliée par a_n de la première multipliée par b_n, il vient une équation de l'ordre $n-1$; retranchant la seconde équation multipliée par $a_n x + a_{n-1}$ de la première multipliée par $b_n x + b_{n-1}$, on obtient encore une seconde équation d'ordre $n-1$; la seconde équation étant multipliée par $a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2}$ et la première par $b_n x^2 + b_{n-1} x + b_{n-2}$, on a encore après la soustraction une équation d'ordre $n-1$. En continuant ainsi, on tire des deux équations n autres équations d'ordre $n-1$, dont la dernière s'obtient en multipliant la seconde équation par

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} \ldots + a_1,$$

et la première par

$$b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \ldots + b_1,$$

et faisant la soustraction. Euler a employé, dans son *Introductio*, la première et la dernière de ces équations, et a pu déduire des deux équations données deux autres d'un ordre immédiatement inférieur ; et par la même méthode, ayant déduit de ces deux-là deux autres d'un ordre inférieur, et continuant de même, il enseigne le moyen de parvenir à deux équations linéaires, d'où l'on peut tirer la valeur de la racine *commune* et aussi l'équation de condition, qui ne renferme plus la variable. Mais dès qu'on peut obtenir par le moyen indiqué n équations entre les $n-1$ quantités linéaires, x, x^2, x^3, ... x^{n-1}, on peut les éliminer ; on parvient ainsi de suite à l'équation finale. Telle est la méthode de Bezout, et comme il paraît la plus expéditive de toutes, et par laquelle nous verrons que le problème de l'élimination de la variable entre deux équations du $n^{ème}$ degré est ramenée à l'élimination de $n-1$ variables, de n équations linéaires, élimination qu'on effectue par la formule générale connue. Suivons cette méthode de plus près.

II.

Posons :

$$\left.\begin{aligned}
m_0 &= [a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots a_1]\varphi(x) \\
&\quad -(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots b_1] f(x) \\
m_1 &= [a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \ldots a_2]\varphi(x) \\
\vdots &\quad -[b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \ldots b_2] f(x) \\
m_{n-1} &= a_n(\varphi(x)) - b_n f(x).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et soit encore, le terme constant étant multiplié par x^0

$$\left.\begin{aligned}
m_0 &= \alpha_{0,0} x^0 + \alpha_{1,0} x^1 + \alpha_{2,0} x^2 + \ldots \alpha_{n-1,0} x^{n-1} \\
m_1 &= \alpha_{0,1} x^0 + \alpha_{1,1} x^1 + \alpha_{2,1} x^2 + \ldots \alpha_{n-1,1} x^{n-1} \\
\vdots & \\
m_{n-1} &= \alpha_{0,n-1} x^0 + \alpha_{1,n-1} x^1 + \alpha_{2,n-1} x^2 + \ldots \alpha_{n-1,n-1} x^{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

L'équation finale cherchée sera le résultat de l'élimination des $n-1$ quantités x^1, x^2, x^3, $\ldots x^{n-1}$ entre les n équations des $n-1^{\text{ème}}$ ordre.

$$m_0 = 0;\ m_1 = 0;\ m_2 = 0;\ \ldots m_{n-1} = 0.$$

Examinons de plus près ces n équations.

D'abord *les séries horizontales des coefficients sont les mêmes que les séries verticales*, ou bien on a :

$$\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}. \quad (3)$$

En effet, l'on a :

$$\left.\begin{aligned}
m_s &= [a_n x^{n-s-1} + a_{n-1} x^{n-s-2} + \ldots a_{s+1}]\varphi(x) \\
&\quad -[b_n x^{n-s-1} + b_{n-1} x^{n-s-2} + \ldots b_{s+1}] f(x) \\
&= \alpha_{0,s} x^0 + \alpha_{1,s} x^1 + \alpha_{2,s} x^2 + \ldots \alpha_{n-1,s} x^{n-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Remplaçant $\varphi(x)$ et $f(x)$ par leurs valeurs, on obtient :

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{r,s} &= a_{s+1} b_r + a_{s+2} b_{r-1} + a_{s+3} b_{r-2} + \ldots {}_{r+s+1} a b_0 \\
&\quad - [b_{s+1} a_r + b_{s+2} a_{r-1} + \ldots b_{r+s+1} a_0].
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Si $r+s+1 > n$, alors la partie positive s'arrête au terme

$a_n b_{r+s+1-n}$ et la partie négative à $b_n a_{r+s+1-n}$, on a de même

$$\begin{aligned}\alpha_{s,r} &= a_{r+1}b_s + a_{r+2}b_{s-1} + \ldots + a_{s+r+1}b_0\\ &- [b_{r+1}a_s + b_{r+2}a_{s-1} + \ldots + b_{r+s+1}a_0].\end{aligned}$$

Si $s > r$, on a :

$$\begin{aligned}\alpha_{s,r} - \alpha_{r,s} &= a_{r+1}b_s + a_{r+2}b_{s-1} + \ldots + a_s b_{r+1}\\ &- [b_{r+1}a_s + b_{r+2}a_{s-1} + \ldots + b_s a_{r+1}];\end{aligned}$$

or, le second membre s'annule de lui-même, donc

$$\alpha_{s,r} = \alpha_{r,s}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Il suit des formules (1) et (2), et de l'équation (3)

$$\begin{aligned}m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots + m_{n-1}x^{n-1} &= \Sigma\alpha_{r,s}x^r x^s =\\ &= [na_n x^{n-1} + n-1 . a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1]\varphi x -\\ &- [nb_n x^{n-1} + n-1 . b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b']f(x);\end{aligned}$$

dans la somme Σ, on donne à r et s toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, ... $n-1$. On peut aussi mettre cette formule sous cette forme :

$$\begin{aligned}m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots + m_{n-1}x^{n-1} &= \Sigma\alpha_{r,s}x^r x^s\\ &= \varphi(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}.\end{aligned}$$

III.

x^0, x^1, x^2, ... x^{n-1} étant considérées comme n inconnues, posons qu'on ait obtenu par la résolution des équations (2) :

$$\left.\begin{aligned}&Lx^0 = A_{0,0}m_0 + A_{0,1}m_1 + A_{0,2}m_2 + \ldots A_{0,\,n-1}m_{n-1}\\ &Lx^1 = A_{1,0}m_0 + A_{1,1}m_1 + A_{1,2}m_2 + \ldots A_{1,\,n-1}m_{n-1}\\ &Lx^2 = A_{2,0}m_0 + A_{2,1}m_1 + A_{2,2}m_2 + \ldots A_{2,\,n-1}m_{n-1}\\ &Lx^{n-1} = A_{n-1,0}m^0 + A_{n-1,1}m_1 + A_{n-2,2}m_2 + \ldots A_{n-1,n-1}m_{n-1}\\ &L = \Sigma \pm \alpha_{0,0}\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\ldots\alpha_{n-1,\,n-1}\end{aligned}\right\}\ (6)$$

où Σ désigne comme à l'ordinaire le *déterminant* (*) formé d'après la règle connue. On sait que la propriété des coefficients des équations (2) appartient aussi aux coefficients de leurs équations inverses (6), et que l'on a

$$A_{r,s} = A_{s,r}. \tag{7}$$

L'équation finale, résultat de l'élimination de $x^1, x^2, x^3, \ldots x^{n-1}$ des n équations $m_0=0$; $m_1=0$; $m_2=0, \ldots m_{n-1}=0$, est

$$L = \Sigma \pm \alpha_{0,0}\alpha_{1,1} \ldots \alpha_{n-1,\, n-1} = 0 \ (^{**}). \tag{8}$$

Tirons-en diverses expressions de la racine commune x et de ses puissances ; or, en omettant une des n équations $m_0=0$, $m_1=0, \ldots m_{n-1}=0$, on déduit des $n-1$ équations restantes, des rapports entre les inconnues ; et selon que l'équation donnée est la première, la seconde ou la $n^{ème}$, on aura n modes différents de déterminer ces rapports.

Si on n'admet pas l'équation $m_r = 0$, alors on déduit de (6) :

$$x^0 : x^1 : x^2 \ldots : x^{n-1} = A_{0,r} : A_{1,r} : A_{2,r} \ldots : A_{n-1,r}. \tag{9}$$

d'où $x^{r'} : x^{s'} = A_{r',r} \ldots : A_{s',r}$. On trouve de la même manière, en ne faisant point usage de l'équation $m_{r'}=0$:

$$x^r : x^s = A_{r,r'} : A_{s,r'} ;$$

et comme $A_{r,r'} = A_{r',r}$, on a :

$$x^{r'}x^s : x^{s'}x^r :: A_{s,r'} : A_{s',r} = A_{r',s} : A_{s',r}. \tag{10}$$

Donc m et m' désignant deux quelconques des nombres 0, 1, 2, 3, … $n-1$, le produit $x^m x^{m'}$ est proportionnel à $A_{m,m'}$; il s'ensuit que lorsque $r+s=r'+s'$, on a :

$$A_{r,s} = A_{r',s'}.$$

(*) Fonction cramérienne. Tm.

(**) Donc l'équation finale est une fonction cramérienne. Tm.

IV.

L'équation finale $L = 0$ n'est pas affectée d'un facteur superflu ; car, comme les quantités $a_{r,s}$ sont linéaires relativement à a_r et à b_r, il est clair que l'expression L monte à la dimension n relativement à chacune de ces deux constantes, et on peut établir *à priori* qu'une équation finale ainsi composée est debarrassée de tout facteur étranger.

En effet, Euler a jadis fait observer (anc. Mém. de l'Acad. de Berlin, IV, 1748) qu'on obtient l'équation finale vraie et pure, résultant de l'élimination de x entre les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, si l'on substitue toutes les racines de la seconde équation $\varphi(x) = 0$ dans $f(x)$, et qu'on égale à 0 le produit de toutes ces valeurs. Il est evident que les constantes de fx montent dans ce produit à une dimension marquée par le nombre des racines ou par le degré de l'équation $\varphi(x) = 0$; ainsi, comme ce qu'on dit d'une fonction doit se dire de l'autre, l'expression L renfermera aussi les constantes de $\varphi(x)$ à une dimension désignée par le degré de $f(x) = 0$; donc, dans le cas actuel, où les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont chacune de degré n, l'expression L relativement aux constantes de l'une et de l'autre fonction, monte au degré n par la nature de la question, et ne peut descendre à un degré moindre.

Toutes les fois donc que dans la suite de ces calculs nous tomberons sur une équation $M = 0$, M désignant une fonction rationnelle entière des constantes a_r, b_r, telle que relativement à l'une ou à l'autre de ces constantes le degré est moindre que n, nous en conclurons que cette équation ne saurait être l'équation finale, ni divisible par l'équation finale, mais que M est identiquement nul.

V.

Les expressions $A_{r,s}$ sont de la dimension $n-1$ par rapport à a_m et à b_m, donc l'équation trouvée ci-dessus $A_{r,s} = A_{r',s'}$ (lorsque $r+s = r'+s'$) est une identité, ou bien *toutes les quantités* $A_{r,s}$ *où la somme des indices est la même sont identiques*. Comme les expressions $A_{r,s}$ dépendent seulement de la somme des indices, nous écrirons par la suite

$$A_{r,s} = A_{r+s}. \tag{11}$$

Cette mutation admise, nous voyons que *telle est la nature des coefficients* $\alpha_{r,s}$ *qui affectent les équations linéaires, desquelles on tire l'équation finale cherchée par l'élimination des inconnues*, que si l'on pose :

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{0,0}x_0 + \alpha_{0,1}x_1 + \alpha_{0,2}x_2 + \ldots + \alpha_{0,n-1}x_{n-1} = m_0 \\
\alpha_{1,0}x_0 + \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} = m_1 \\
\alpha_{2,0}x_0 + \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n-1}x_{n-1} = m_2 \\
\vdots \\
\alpha_{n-1,0}+x_0+\alpha_{n-1,1}x_1+\alpha_{n-1,2}x_2+\ldots+\alpha_{n-1,n-1}x_{n-1}=m_{n-1}
\end{array}\right\} \tag{12}$$

les équations inverses, pour lesquelles les quantités x_r *sont exhibées en* m_r, *prennent la forme :*

$$\left.\begin{array}{l}
Lx_0 = A_0m_0 + A_1m_1 + A_2m_2 + \ldots + A_{n-1}m_{n-1} \\
Lx_1 = A_1m_0 + A_2m_1 + A_3m_2 + \ldots + A_nm_{n-1} \\
Lx_2 = A_2m_0 + A_3m_1 + A_4m_2 + \ldots + A_{n+1}m_{n-1} \\
\vdots \\
Lx_{n-1} = A_{n-1}m_0 + A_nm_1 + A_{n+1}m_2 + \ldots + A_{2n-2}m_{n-1}
\end{array}\right\} \tag{13}$$

Si l'on substitue ces équations (13) dans une des équations (12),

$$\alpha_{r,0}x_0 + \alpha_{r,1}x_1 + \alpha_{r,2}x_2 + \ldots + \alpha_{r,n-1}x_{n-1} = m_r,$$

il vient :

$$\alpha_{r,0}A_r + \alpha_{r,1}A_{r+1} + \alpha_{r+2}A_{r+2} + \ldots + \alpha_{r,n-1}A_{r+n-1} = L; \tag{14}$$

et si r et s sont différents, on a l'identité

$$\alpha_{r,0}A_s + \alpha_{r,1}A_{s+1} + \alpha_{r,2}A_{s+2} + \ldots + \alpha_{r,n-1}A_{s+n-1} = 0. \tag{15}$$

Dans ces formules, r, s peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ... $n-1$.

VI.

Il suit des formules (10) et (11) :

$$x^{r'+s} : x^{s'+r} = \mathrm{A}_{r'+s} : \mathrm{A}_{s'+r},$$

où r, r', s, s' sont des nombres quelconques de la suite 0, 1, 2, ... $n-1$; ainsi toutes les fois qu'une valeur de x satisfait aux deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, et qu'on a par conséquent $\mathrm{L} = 0$, les puissances x^m de x sont proportionnelles aux quantités A_m, m désignant un quelconque des nombres 0, 1, 2, ... $n-1$, ou bien qu'on a :

$$1 : x : x^2 : x^3 \ldots : x^{2n-2} = \mathrm{A}_0 : \mathrm{A}_1 : \mathrm{A}_2 : \mathrm{A}_3 \ldots : \mathrm{A}_{2n-2}. \quad (16)$$

De là on peut déduire diverses relations entre les quantités A_0, A_1,... A_{2n-2} lorsqu'en même temps il existe entre les constantes a_r, b_r l'équation conditionnelle $\mathrm{L} = 0$; ainsi de (16) on déduit :

$$\mathrm{A}_m \mathrm{A}_{m'} = \mathrm{A}_{m+m'} ; \quad \mathrm{A}_0^{m-1} \mathrm{A}_m = \mathrm{A}_1^m, \quad (17)$$

ou bien les expressions $\mathrm{A}_m \mathrm{A}_{m-1} - \mathrm{A}_{m+m'}$; $\mathrm{A}_0^{m-1} \mathrm{A}_m - \mathrm{A}_1^m$ sont divisibles par L.

Si l'on multiplie les équations proposées

$$0 = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_n$$
$$0 = \varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots b_n$$

successivement par 1, x, x^2... x^{n-2}, et qu'on remplace dans les produits les puissances x^m de x par les quantités proportionnelles A_m, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_0 \mathrm{A}_1 + a_1 \mathrm{A}_1 + a_2 \mathrm{A}_2 + \ldots + a_n \mathrm{A}_n \\ 0 = a_0 \mathrm{A}_1 + a_1 \mathrm{A}_2 + a_2 \mathrm{A}_3 + \ldots + a_n \mathrm{A}_{n+1} \\ \vdots \\ 0 = a_0 \mathrm{A}_{n-2} + a_1 \mathrm{A}_{n-1} + \ldots + a_n \mathrm{A}_{2n-2} \end{array}\right\} \quad (18)$$

Equations analogues en b. (19)

Mais les expressions à droite dans (18) montent seulement au degré $n-1$ relativement aux constantes b_m, et dans les équations (19) seulement au degré $n-1$ relativement aux constantes a_n; donc, d'après les observations du § IV, *les équations* (18) *et* (19) *sont identiques*.

Nous avons vu qu'on peut former, avec les constantes qui affectent les équations proposées du $n^{ème}$ degré, $2n-1$ expressions (A_0, A_1 .... A_{2n-2}), expressions entières où les constantes de l'une et l'autre équation montent au degré $n-1$, et qui sont, toutes les fois que les équations ont une racine commune, proportionnelles aux puissances 0, 1, 2 .... $2n-2$ de la racine commune ; et il résulte facilement ce qui précède, qu'*il n'existe pas une telle expression qui soit proportionnelle à la puissance $2n-1$ de la racine commune.*

Car, soit A_{2n-1} une expression telle que l'on ait :

$$x^0 : x^1 : x^2 : \ldots . x^{2n-2} : x^{2n-1} = A_0 : A_1 : A_2 \ldots . : A_{2n-2} : A_{2n-1},$$

multipliant les deux équations proposées par x^{n-1} et remplaçant les puissances de x par les quantités proportionnelles en A_m, il vient

$$a_0 A_{n-1} + a_1 A_n + a_2 A_{n+1} + \ldots . + a_n A_{2n-1} = 0,$$
$$b_0 A_{n-1} + b_1 A_n + b_2 A_{n+1} + \ldots . + b_n A_{2n-1} = 0.$$

Ces deux équations montant au même degré $n-1$ par rapport aux constantes sont identiques. La première de ces équations réunie aux équations (18) donne un système qui fournit les rapports entre a_0, a_1, a_2, ... a_4; la deuxième de ces équations, jointe aux équations (19), donne un système d'où l'on déduit les rapports entre b_0, b_1, ... b_n; comme ces rapports proviennent de la même manière de deux systèmes identiques, on aura donc :

$$a_0 : a_1 : a_2 \ldots . : a_n = b_0 : b_1 : b_2 \ldots . : b_n,$$

ce qui est absurde.

VII.

Soient M et N deux fonctions de x rationnelles, entières et de degré $n-1$; on peut toujours déterminer les $2n$ coefficients de ces fonctions de manière que l'expression

$$Mf(x)+N\varphi(x)=P$$

devienne égale à une expression donnée en x, rationnelle et entière et de degré $2n-1$. Cette détermination des coefficients de M et N exige la résolution de $2n$ équations linéaires entre deux inconnues. Appelons L le dénominateur commun aux valeurs algébriques de ces coefficients, obtenus par la résolution des équations ; et posons :

$$Mf(x)+N\varphi(x)=P=LQ$$

dont les coefficients de M et N sont des fonctions entières des constantes qui affectent $f(x)$, $\varphi(x)$ et Q.

Toutes les fois qu'on aura simultanément $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$, on aura aussi $L=0$; car il est permis de faire $Q=1$. Cette équation, ne renfermant pas de x, n'est autre que l'équation finale cherchée et la même que nous avons trouvée ci-dessus. Euler est le premier qui ait indiqué cette méthode d'élimination (Acad. de Berlin, XX, an. 1764) (*). Montrons comment Q étant 1, ou égal à $x, x^2, x^3 \ldots . x^{2n-1}$, ou à une fonction quelconque entière et d'ordre $2n-1$, les fonctions multiplicatrices M et N peuvent généralement être déterminées en

$$A_0, A_1, A_2 \ldots . A_{2n-2}.$$

Substituant dans (13) x^r au lieu de x_r, où r est un des nombres 0, 1, 2 .... $n-1$, il vient :

$$L.x^r=A_r m_0+A_{r+1} m_1+A_{2+r} m_2+\ldots+A_{n-1+r} m_{n-1}.$$

(*) Bezout a étendu cette méthode à un nombre quelconque d'équations. C'est le but de son celèbre traite des équations. Tm.

Dans cette valeur, si nous remplaçons m_0, m_1, $m_2 \ldots . m_{n-1}$ par leurs valeurs tirées de (2), § II, et ayant posé :

$$\begin{aligned}
-\mathrm{M}_r = \mathrm{A}_r\ &[b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_1] \\
+ \mathrm{A}_{r+1}&[b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \ldots + b_2] \\
+ \mathrm{A}_{r+2}&[b_n x^{n-3} + b_{n-1}x^{n-4} + \ldots + b_3] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \mathrm{A}_{r+n-1}&b_n ;
\end{aligned} \qquad (20)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_r = \mathrm{A}_r\ &[a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1] \\
+ \mathrm{A}_{r+1}&[a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + a_2] \\
+ \mathrm{A}_{r+2}&[a_n x^{n-3} + a_{n-1}x^{n-4} + \ldots + a_3] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \mathrm{A}_{r+n-1}&a_n ;
\end{aligned}$$

il vient :

$$\mathrm{M}_r f(x) + \mathrm{N}_r \varphi(x) = \mathrm{L}x^r. \qquad (21)$$

Le nombre r peut prendre seulement les valeurs $0, 1, 2 \ldots . n-1$; mais nous allons faire voir comment les fonctions multiplicatrices se déduisent de nos formules pour les valeurs $n, n+1, \ldots . 2n-1$ de r.

VIII.

Supposons que dans toutes les formules de ci-dessus, on remplace x par $\frac{1}{x}$ et a_r, b_r par a_{n-r}, b_{n-r} ; alors les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ deviennent $x^{-n}f(x)$; $x^{-n}\varphi(x)$. Par le même changement dans les formules (1) du paragraphe 2, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_r &= [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-r-1}x^{n-r-1}]\frac{\varphi(x)}{x^{2n-r-1}} \\
&+ [b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-r-1}x^{n-r-1}]\frac{f(x)}{x^{2n-r-1}} \\
&= -[a_{n-r} + a_{n-r+1}x + a_{n-r+2}x^2 + \ldots + a_n x^r]\frac{\varphi(x)}{x^{n-1}} \\
&+ [b_{n-r} + b_{n-r+1}x + b_{n-r+2}x^2 + \ldots + b_n x^r]\frac{f(x)}{x^{n-1}} \\
&= -\frac{m_{n-1-r}}{x_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Les formules (2) du § II donnent :

$$\frac{-m_{n-1-r}}{x^{n-1}} = \alpha_{n-1,\,n-1-r} + \alpha_{n-2,\,n-1-r}\frac{1}{x} + \alpha_{n-3,\,n-1-r}\frac{1}{x^2} + \ldots\ldots + \alpha_{0,\,n-1-r}\frac{1}{x^{n-1}}.$$

Ainsi, au moyen de ce changement, $\alpha_{s,r}$ se change en $-\alpha_{n-1-s,\,n-1-r}$. Je fais observer que, étant posées généralement les équations linéaires quelconques (2), si on remplace $\alpha_{s,r}$ par $\alpha_{n-1-s,\,n-1-r}$, alors dans les questions inverses (6) L restera invariable, $A_{r,s}$ se changera en $A_{n-1-r,\,n-1-s}$; si en même temps les coefficients $\alpha_{s,r}$ changent de signe, alors L et $A_{r,s}$ se changent en $(-1)^n L$, $(-1)^{n-1}A_{r,s}$; de là, dans le cas actuel, pour le changement indiqué, L et A_r deviennent $(-1)^n L$ et $(-1)^{n-1}A_{2n-2-r}$. Ainsi, ayant remplacé x par $\frac{1}{x}$, et a_r, b_r par a_{n-r}, b_{n-r}, alors $f(x)$, $\varphi(x)$, m_r, $a_{r,s}$, L, A_r se changent en $\frac{f(x)}{x^n}$, $\frac{\varphi(x)}{x^n}$, $\frac{m_{n-1-r}}{x^{n-1}}$, $\alpha_{n-1-r,\,n-1-s'}$, $(-1)^n L$, $(-1)^{n-1}A_{2n-2-r}$.

Faisant ces changements dans (20) et (21), et après avoir multiplié par $(-1)^n x^{2n-1}$, il vient :

$$M_{2n-1-r}f(x) + N_{2n-1-r}\varphi(x) = Lx_{2n-1-r}, \tag{22}$$

où

$$\begin{aligned} M_{2n-1-r} = {} & A_{2n-2-r}\left[b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots b_{n-1}x^{n-1}\right] \\ & + A_{2n-3-r}\left[b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots b_{n-2}x^{n-2}\right] \\ & + A_{2n-4-r}\left[b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots b_{n-3}x^{n-3}\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_{n-1-r}x^{n-1}b_0\,; \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} -N_{2n-1-r} = {} & A_{2n-2-r}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots a_{n-1}x^{n-1}\right] \\ & + A_{2n-3-r}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots a_{n-2}x^{n-2}\right] \\ & + A_{2n-4-r}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots a_{n-3}x^{n-3}\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & A_{n-1-r}\,x^{n-1}a_0 \end{aligned}$$

Dans ces formules r peut prendre derechef les valeurs $0, 1, 2, \ldots. n-1$. Donc $2n-1-r$ peut prendre les valeurs $n, n+1, n+2 \ldots. 2n-1$. Ainsi toutes les fonctions multiplicatrices sont déterminées. De là on peut déduire facilement les expressions des mêmes fonctions lorsque

$$Q = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots l_{2n-1} x^{2n-1};$$

car on aura :

$$\begin{aligned} M &= l_0 M_0 + l_1 M_1 + \ldots. l_{2n-1} M_{2n-1}, \\ N &= l_0 N_0 + l_1 N_1 + \ldots. l_{2n-1} N_{2n-1}. \end{aligned}$$

IX.

Si $r < n$, nous déduisons des équations (20) les fonctions multiplicatrices par les formules

$$\left.\begin{aligned} -M_r &= \left[\frac{A_r}{x} + \frac{A_{r+1}}{x^2} + \frac{A_{r+2}}{x^3} + \ldots. + \frac{A_{r+n-1}}{x^n}\right]\varphi(x), \\ N_r &= \left[\frac{A_r}{x} + \frac{A_{r+1}}{x^2} + \frac{A_{r+2}}{x^3} + \ldots. + \frac{A_{r+n-1}}{x^n}\right] f(x), \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

avec la condition de rejeter les puissances négatives de x.

Si $r \geqq n$, nous tirons de (23), en mettant r au lieu de $2n-1-r$,

$$\left.\begin{aligned} M_r &= [A_{r-1} + A_{r-2} x + A_{r-3} x^2 + \ldots. + A_{r-n} x^{n-1}]\varphi(x) \\ -N_r &= [A_{r-1} + A_{r-2} x + A_{r-3} x^2 + \ldots. + A_{r-n} x^{n-1}] f(x) \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

en rejetant les puissances de x supérieures à $n-1$.

Au cas où les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont le facteur linéaire $x-\xi$ en commun, nous avons vu que l'on a $\xi_r = \frac{A_r}{A_0}$; d'où l'on conclut facilement que dans ce cas on a :

$$\left.\begin{aligned} -M_r &= A_0 \frac{\xi^r \varphi(x) - x^r \varphi(\xi)}{x-\xi} = A_0 \xi^r . \frac{\varphi(x)}{x-\xi} \\ N_r &= A_0 \frac{\xi^r f(x) - x^r f(\xi)}{x-\xi} = A_0 \xi^r \frac{f(x)}{x-\xi} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Euler a indiqué, dans le mémoire ci-dessus cité, la nature de ces fonctions multiplicatrices. — $A_0 \xi^r \frac{d\varphi x}{dx}$ et $-A_0 \frac{dfx}{dx}$ sont les valeurs que prennent M_r et N_r lorsqu'on suppose $x = \xi$.

(*La suite prochainement.*)