NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

B. JAUFROID

Solution de la question 178

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 144-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__144_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION 178 (p. 75).

PAR M. B. JAUFROID,
maître d'études au lycée de Dijon, admissible à l'École normale supérieure.

—

(*Fig.* 25.) Je prends pour axes des coordonnées, les axes principaux de l'ellipse : on aura

$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ pour l'ellipse;

(1) $\quad y^2+x^2=a^2$ pour le cercle décrit sur le grand axe;

(2) $\quad y=\alpha(x-c)$ pour une corde quelconque MN passant par le foyer F.

(3) $\quad y=-\frac{1}{\alpha}(x-c)$ pour la corde PQ perpendiculaire à la première.

(*Fig.* 25.) Soient x', y', x'', y'' les coordonnées des points d'intersection de MN avec le cercle.

$$(x'-x'')^2=4\frac{a^2+b^2\alpha}{(1+\alpha^2)^2};\quad (y'-y'')^2=4\frac{\alpha^2(a^2+b^2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2},$$

$$\overline{\mathrm{MN}}^2=4\frac{a^2+b^2\alpha^2}{1+\alpha^2}=d^2.$$

En changeant dans cette expression α en $-\frac{1}{\alpha}$, et par conséquent α^2 en $\frac{1}{\alpha^2}$, on trouve :

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=4\frac{b^2+a^2\alpha^2}{1+\alpha^2},\ \text{d'où}\ d^2+d'^2=4(a^2+b^2);$$

donc les cordes MN, PQ sont égales à deux diamètres conjugués dans l'ellipse.

Soit $y=mx$ l'équation du diamètre égal à d, et x'_1, y'_1,

x_1'', y_1'' les coordonnées des extrémités de ce diamètre, on a :

$$d^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2.$$

On trouve :

$$(x_1'-x_1'')^2=4\,\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2};\ (y_1'-y_1'')^2=4\,\frac{a^2b^2m^2}{a^2m^2+b^2};$$

$$d^2=4\,\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2}.$$

En changeant m en m', on a pour d'^2 :

$$d'^2=4\,\frac{a^2b^2(1+m'^2)}{a^2m'^2+b^2}.$$

Les deux équations en m et m' sont donc

$$\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2}=\frac{a^2+b^2\alpha^2}{1+\alpha^2}\ \text{ et }\ \frac{a^2b^2(1+m'^2)}{a^2m'^2+b^2}=\frac{b^2+a^2\alpha^2}{1+\alpha^2};$$

en les résolvant et prenant m et m' de signes contraires, on a :

$$m=\pm\frac{b\alpha}{a};\ m'=\mp\frac{b}{a\alpha},$$

et l'on a bien

$$mm'=-\frac{b}{a}.$$

Soit maintenant $y=\alpha x$ un diamètre parallèle à la corde $y=\alpha(x-c)$, les coordonnées du point d'intersection de ce diamètre avec la corde $y=-\frac{1}{\alpha}(x-c)$ sont :

$$x=\frac{c}{1+\alpha^2};\ y=\frac{\alpha c}{1+\alpha^2};$$

la distance de ce point d'intersection au centre est donc

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{c^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}}=\frac{c}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

par conséquent, les segments de ce diamètre sont :

$$a - \frac{c}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{a\sqrt{1+\alpha^2}-c}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \tag{4}$$

$$a + \frac{c}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{a\sqrt{1+\alpha^2}+c}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \tag{5}$$

Cherchons maintenant les rayons vecteurs menés du foyer F aux extrémités du diamètre conjugué $y = mx$ ou $\frac{b\alpha}{a}x$, en prenant le signe $+$ pour m. Les coordonnées des points d'intersection de ce diamètre avec l'ellipse sont :

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{1+\alpha^2}}; \; y = \pm\frac{b\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

la distance du foyer F à chacun de ces points est

$$\sqrt{\left(c - \frac{a}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 + \frac{b^2\alpha^2}{1+\alpha^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2(1+\alpha^2)-2ac\sqrt{1+\alpha^2}+a^2+b^2\alpha^2}{1+\alpha^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2+a^2(1+\alpha^2)-2ac\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\alpha^2}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{1+\alpha^2}-c}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

expression égale à (4). Faisant le même calcul pour le deuxième rayon, on trouve :

$$\frac{a\sqrt{1+\alpha^2}-c}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

expression égale à (5).

Si on prend le diamètre $y = -\frac{1}{\alpha}x$ parallèle à la corde $y = -\frac{1}{\alpha}(x-c)$, on trouve pour les segments de ce diamètre, déterminés par la corde $y = \alpha(x-c)$, et pour les rayons vecteurs menés du foyer F aux extrémités du diamètre conjugué $y = -\frac{b}{a\alpha}x$, les expressions communes

$$\frac{a\sqrt{1+\alpha^2}-c\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \text{ et } \frac{a\sqrt{1+\alpha^2}+c\alpha}{\sqrt{1+a^2}}.$$

La deuxième partie du théorème se trouve ainsi démontrée. Dans l'hyperbole, la somme des carrés des cordes MN et PQ est constante.