

TERQUEM

**Note historique sur le binôme de Newton,
les exposants négatifs et fractionnaires**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 85-91

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_85_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE HISTORIQUE

sur le binôme de Newton , les exposants négatifs et fractionnaires.

OLDEMBURG (Henri) (*), l'un des premiers secrétaires de la Société royale de Londres lors de sa fondation, correspondant de Newton et de Leibnitz, servait d'intermédiaire aux deux plus puissants génies contemporains; car Descartes avait succombé aux rigueurs du climat de Stockholm, juste au milieu du siècle, en 1650, huit ans après la mort de Galilée, et aussi après la naissance de Newton, en 1642.

(*) Né à Bremen, mort à Carlton, près Greenwich, en août 1678.

Leibnitz, étant à Paris, écrivit, le 12 mai 1676, à Oldemburg qu'un géomètre danois, Mohr (Georges), y avait apporté deux séries, qui lui avaient été communiquées par Collins (*) à Londres, contenant l'expression d'une relation entre l'arc et son sinus. Ces séries sont, x étant le sinus de l'arc z et $R=1$,

$$z = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \text{etc.};$$

$$x = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7.$$

La seconde série surtout lui parut d'une singulière élégance, *et posterior imprimis series elegantiam quandam singularem habeat*. Il prie Oldemburg de lui en envoyer la démonstration et de s'adresser pour cela à Collins. Dans une lettre du 14 juin suivant, Collins écrit en réponse à Oldemburg que les coefficients de la première série étaient aussi réguliers que ceux de la seconde, et que telle était leur loi de formation :

$$\frac{1.1}{2.3} = \frac{1}{6}; \quad \frac{1.3.3}{6.4.5} = \frac{3}{40}; \quad \frac{3.5.5}{40.6.7} = \frac{5}{112}, \text{ etc.,}$$

mais sans démonstration. Oldemburg avait aussi écrit à ce sujet à Newton, alors professeur à l'université de Cambridge, et auteur de ces séries. L'illustre géomètre envoya une réponse le 13 juin 1676, avec prière d'en faire part à Leibnitz, ce qui eut lieu le 26 juin. Nous donnons le commencement de cette lettre si remarquable où l'on rencontre la première formule du célèbre binôme. « *Quamquam D. Leibnitii modestia, in Excerptis, quæ ex epistola ejus ad me nuper misisti, nostratibus multùm tribuat circa speculationem quandam infinitarum serierum, de quâ jam*

(*) Surnommé le Mersenne anglais; mort en 1683.

» cepit esse rumor; nullus dubito tamen, quin ille, non
 » tantum (quod asserit) methodum reducendi quantitates
 » quascunque in ejusmodi series, sed et varia compendia,
 » fortè nostris similia, si non et meliora, adinvenerit. »

Newton, Leibnitz, Euler, bien loin de chercher à atténuer le mérite d'autrui, se sont toujours efforcés à en rehausser l'importance; malheureusement on n'en peut dire autant de tous les grands géomètres, pas même de notre immortel philosophe. « Quoniam tamen ea scire pervelit, quæ ab
 » Anglis hac in re inventa sunt, et ipse ante annos aliquot in
 » hanc speculationem inciderim; ut votis ejus aliqua saltem
 » ex parte satisfacerem, nonnulla eorum, quæ mihi occur-
 » rerunt, ad te transmisi. »

Newton avait trente-quatre ans en écrivant cette lettre, et il y avait déjà plusieurs années (antè annos aliquot) qu'il était parvenu à ses principales formules.

« Fractiones in infinitas series reducuntur per divisionem,
 » et quantitates radicales per extractionem radicum: perinde
 » instituendo operationes istas in speciebus, ac institui solent
 » in decimalibus numeris. Hæc sunt fundamenta harum re-
 » ductionum. »

On voit donc que ce sont les opérations sur les fractions décimales introduites par Stevin qui ont suggéré à Newton l'idée d'appliquer ce genre d'opérer aux expressions algébriques, et, opérant ainsi dans les extractions des racines, il a été amené, par induction, au théorème dont il va être question.

« Sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc
 » *theorema*

$$\begin{aligned}
 \text{« } (P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \\
 + \frac{m-3n}{4n} DQ + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

» Ubi P+PQ significat quantitatem, cujus radix, vel etiam
 » dimensio quævis, vel radix dimensionis, investiganda est,
 » P primum terminum quantitatis ejus; et reliquos terminos
 » divisos per primum. Et $\frac{m}{n}$ numeralem indicem dimensio-
 » nis ipsius P+PQ; sive dimensio illa sit integra; sive (ut
 » ita loquar) fracta; sive affirmativa, sive negativa. Nam,
 » sicut analystæ pro aa, aaa, etc., scribere solent $a^2, a^3, \text{etc.}$,
 » sic ego, pro $\sqrt{a}, \sqrt{a^3}, \sqrt[3]{Ca^5}$, etc., scribo $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{5}{3}}$;
 » et pro $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{aaa}$, scribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} . et sic pro

$$\frac{a^1 a}{\sqrt{C: a^3 + bbx}}, \text{ scribo } a^3(a^3 + b^2x)^{\frac{1}{3}}; \text{ et pro}$$

$$\frac{a^2 b}{\sqrt{C: a^3 + b^2 x a^3 + b^2 x}} = a^2 b (a^3 + b^2 x)^{-\frac{2}{3}}.$$

» In quo ultimo casu, si $(a^3 + b^2x)^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur esse
 » $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ in regula: erit $P=a^3; Q=\frac{b^2x}{a^3}; m=-2; n=3$.
 » Denique, præ terminis inter operandum inventis in quoto,
 » usurpo A, B, C, D, etc. Nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$;
 » B pro secundo $\frac{m}{n}AQ$, et sic deinceps. Ceterum usus re-
 » gulæ patebit. »

Newton fait donc usage de la méthode récurrente, déduisant chaque terme des précédents, et le binôme est toujours préparé à rendre la série convergente; car, comme il le dit, A est le premier terme, B le second, etc.; quant aux indices exponentiels négatifs et fractionnaires, ils avaient déjà été employés par Wallis dans son *Arithmetica infinitorum* (Prop. LXIV, p. 52); et Wallis en fait lui-même l'observation dans son algèbre. « Eosdem indices seu exponentes retinet

» vix Clarissimus Isaacus Newton (Matheseos Professor
 » eruditissimus in celeberrima Academia Cantabrigiensi)
 » in notatione sua. (De Algebra tractatus, p. 315, 1693,
 » Oxoniæ; l'édition anglaise est de 1685). » Les exemples

donnés par Newton sont $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$; $(c^5 + c^4x - x^5)^{\frac{1}{5}}$;

$(y^3 - a^2y)^{\frac{1}{3}}$, $(d + e)^{\frac{4}{3}}$; $(d + e)^5$; $(d + e)^{-1}$; $(d + e)^{-3}$;

$(d + e)^{-\frac{1}{3}}$; $(d + e)^{-\frac{3}{5}}$. après ces neuf exemples, il dit

qu'on peut se servir de son théorème pour extraire commodément les racines d'indices élevés des nombres. Mais voulant appliquer sa méthode aux racines des équations, il éprouva des difficultés en se servant des moyens proposés par Viète et Oughtred (qua propter aliam excogitare adactus sum). Il fut forcé à en chercher une autre méthode, et il trouva la résolution approchée des équations numériques adoptée dans les éléments; méthode qu'il avait déjà communiquée en 1669 à Barow; dans son *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*. Il en donne deux exemples, savoir :

$$y^3 - 2y - 5 = 0, \text{ et il trouve } y = 2,09455148,$$

et
$$y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0;$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a^2} + \frac{131x^3}{512a} + \frac{509x^4}{16384a^3} + \text{etc.}$$

Ensuite il passe aux séries du sinns par l'arc et *vice versâ*, et encore à d'autres, mais le tout sans aucune démonstration; aussi dans une lettre subséquente du 27 août, Leibnitz écrit à Oldemburg qu'il aurait désiré plus d'explications, par exemple sur le théorème du binôme; *Desideraverim ut clarissimus Newtonus nonnulla quoque amplius explicet; ut, originem theorematis, quod initio ponit.*

Dans une lettre du 24 octobre même année, adressée à Oldembourg pour être communiquée à Leibnitz, Newton

explique comment il est parvenu aux théorèmes consignés dans la lettre du 13 juin. Ce sont les quadratures de Wallis qui lui ont fait découvrir son binôme. Wallis trouve les aires des courbes données par les équations

$$y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}; (1-x^2)^{\frac{2}{2}}; (1-x^2)^{\frac{4}{2}}; (1-x^2)^{\frac{6}{2}},$$

et puis par interpolation les aires des courbes dont les ordonnées sont $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}; (1-x^2)^{\frac{5}{2}} \dots$. En réfléchissant sur la loi des coefficients, Newton a été amené à la loi des coefficients binomiaux fractionnaires, et a vérifié que le développement en série de $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, élevé au carré, donne $1-x^2$; et il l'a encore vérifié en extrayant la racine carrée de $1-x^2$ par la voie ordinaire, et ainsi des autres. Newton ne paraît pas avoir eu une démonstration rigoureuse du binôme; la première, à ce que je sache, est due à Euler. Dans cette même lettre, Newton donne la résolution des équations littérales en séries, explique son *parallélogramme* qui sert de base à la méthode pour le retour des séries; *parallélogramme* qui est encore tacitement employé dans tout ce qu'on a publié récemment sur l'équation finale de l'élimination.

Nous devons ajouter que Stifel (1544) connaît les exposants entiers négatifs; dans le chapitre V de son Arithmétique, p. 246, il donne cette échelle des puissances de 2.

Exposants: — 3; — 2; — 1; 0; 1; 2; 3;

$\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8; et il s'arrête là

en disant: « *Posset hic fere novus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducam et clausis oculis abeam*; et plus loin: *Qualiacumque facit progressio geometrica multiplicando et dividendo, talia facit progressio arithmetica addendo et subtrahendo; sicut $\frac{1}{8}$ multiplicatus in*

64 facit 8, sic — 3 additus 6 facit 3; est autem — 3 exponens ipsius $\frac{1}{8}$; sicut 6 est exponens numeri 64 et 3 exponens numeri 8 (p. 250). On voit qu'il considère 3 comme exposant de 8, et non pas de 2, ce qui manque de clarté; du reste, on voit ici explicitement énoncée toute la théorie logarithmique.

On trouve la lettre de Newton dans le *Commercium Epistolicum*, seconde édit., p. 131, n° XLVIII, et dans les opuscules recueillis par Castillion, t. I, opus. X, p. 307.

De ce qui précède, il ressort que ce qu'on appelle dans les traités élémentaires binôme de Newton, pour l'exposant entier n'appartient pas à Newton; on connaissait déjà depuis Stifel les coefficients binominaux (v. t. V, p. 495). Mais le binôme pour les exposants négatifs et fractionnaires, est une des plus fécondes découvertes du créateur de la mécanique céleste.

Tm.
