

PAUL SERRET

## Concours général de 1846. Mathématiques spéciales

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6 (1847), p. 64-66

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_64\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_64_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1846.

*Mathématiques spéciales.*

PAR M. PAUL SERRET,

Élève.

---

Étant donnée une ellipse, si on lui circonscrit des rectangles tels que  $ABCD$ , on sait que tous les sommets sont situés sur un même cercle concentrique à l'ellipse. Soit  $MNPQ$  le quadrilatère formé par la jonction des points de contact, on propose de démontrer (*fig. 9*) :

1° Que les deux côtés consécutifs  $MN$  et  $NQ$  sont également inclinés sur la tangente  $AB$  qui passe par le point  $N$ , qui leur est commun.

2° Que leur somme  $MN + MQ$  est constante, quel que soit le rectangle.

3° Que toutes ces droites telles que  $QM$ ,  $NM$ , sont toujours tangentes à une même ellipse décrite des mêmes foyers que la proposée.

LEMME. Dans la *fig. 9*,  $MN$  et  $NQ$  sont respectivement parallèles aux diagonales  $BD$  et  $AC$  (*fig. 10*).

Cette proposition, vraie pour un parallélogramme quelconque, se démontre facilement par la considération, que tout parallélogramme  $abcd$  circonscrit au cercle est un losange (*fig. 10*); que par suite, comme l'on a :  $ad = ab$ ,  $am = an$ ,  $mn$  est parallèle à  $bd$ ; de même  $nq$  est parallèle à  $ac$ .

Donc, si l'on projette la figure (*b*) de manière à obtenir

la figure (10), les lignes parallèles  $mn$  et  $bd$ ,  $nq$  et  $ac$  se projettent suivant les parallèles  $MN$  et  $BD$ ,  $NQ$  et  $AC$  de la figure (9). Ce qui démontre le lemme énoncé, qui va nous servir dans la démonstration des deux premières parties de la question. Ce lemme pourrait aussi se démontrer par le calcul.

*Première partie.* Les droites  $MN$ ,  $NQ$  sont également inclinées sur la tangente  $AB$  en  $N$ .

En effet, la figure  $ABCD$  étant un rectangle, les diagonales  $AC$  et  $BD$  sont également inclinées sur le côté  $AB$ ; donc il en est de même de leurs parallèles respectives.

*N. B.* — Si la figure  $ABCD$  était un losange au lieu d'être un rectangle, l'on verrait d'une manière analogue que les droites  $MN$ ,  $NQ$  feraient avec la tangente en  $N$  des angles complémentaires.

*Deuxième partie.* La somme  $MN + NQ$  est constante.

En effet, toujours d'après le lemme démontré, l'on a :

1° Dans le triangle  $DAB$ ,

$$AB : DB :: AN : MN = \frac{DB}{AB} \cdot AN ;$$

2° Dans le triangle  $CAB$ ,

$$AB : DB :: NB : NQ = \frac{DB}{AB} \cdot NB, \text{ car } DB = AC.$$

Donc, comme  $AN + NB = AB$ , on a :

$$MN + NQ = DB = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

*N. B.* — La valeur de la somme constante est  $2\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $a$  et  $b$  désignant les demi-axes de la courbe.

*Troisième partie.* Toutes les droites telles que  $mn$  sont tangentes à une ellipse de mêmes foyers que la proposée.

$\alpha$  et  $\beta$  étant les coordonnées de  $A$ , on a  $a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b'$ .  
L'équation de  $mn$  avec la relation  $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$ .

Soient  $p$  et  $p'$  les perpendiculaires abaissées des deux foyers sur  $mn$ , on aura :

$$p = \frac{b^2(cx - a^2)}{\sqrt{a^4\beta^2 + b^4a^2}}, \quad p' = -\frac{b^2(cx + a^2)}{\sqrt{a^4\beta^2 + b^4a^2}},$$

d'où

$$pp' = b^4 \cdot \frac{a^4 - c^2\alpha^2}{a^4\beta^2 + b^4a^2};$$

remplaçant  $\beta^2$  par  $a^2 + b^2 - \alpha^2$ , il viendra en supprimant  $a^4 - c^2\alpha^2$ , facteur commun aux deux termes :

$$pp' = \frac{b^4}{a^2 + b^2},$$

valeur indépendante de  $\alpha$ , ou de la position particulière du point A, auquel correspond la droite MN ; donc, etc.