NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Mémoire sur la résolution de deux équations à deux inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 54-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__54_0>

MÉMOIRE

sur la résolution de deux équations à deux inconnues.

PAR M. OSSIAN BONNET,
Répétiteur à l'École polytechnique.

La plupart des auteurs d'algèbre ont confondu l'élimination avec la résolution des équations simultanées. Il existe pourtant entre ces deux problèmes une différence essentielle : dans le premier, on se propose, plusieurs équations à pareil nombre d'inconnues étant données, en déduire l'équation finale, c'est-à-dire l'équation à une inconnue qui admet pour racines les valeurs de cette inconnue propres à vérifier les équations proposées, en même temps que des valeurs convenables des autres inconnues ; tandis que le second a pour objet la recherche des solutions des équations proposées. Il est vrai que pour résoudre ce dernier problème on commence ordinairement par faire une élimination ; mais d'une part cette élimination a un tout autre but que l'élimination proprement dite, attendu qu'on s'y propose de trouver non-seulement l'équation finale, mais encore les équations à deux, trois, quatre, etc., inconnues, qui servent à compléter la résolution ; et d'un autre, on conçoit aisément que la détermination des solutions puisse se faire sans passer par l'élimination ; il serait même plus logique, et peut-être plus simple, d'attaquer directement la résolution, ainsi que l'a proposé M. Sarrus dans le *Journal de mathématiques* de M. Liouville (t. VI, p. 171, 1841).

Je ne m'occuperai point ici de l'élimination proprement dite, ce premier problème peut être résolu maintenant d'une manière satisfaisante soit par la méthode de Bezout, soit par la méthode des fonctions symétriques généralisée par Poisson (*), soit même par la méthode du plus grand commun diviseur si remarquablement modifiée par M. Labatie dans le cas de deux équations à deux inconnues. (Voyez la seconde partie d'un mémoire de cet auteur, ou les éléments d'algèbre de M. Fink, p. 408 et suiv., seconde édition.) Du reste je me propose d'en faire l'objet d'un second travail ; je me bornerai à considérer la résolution des équations simultanées. La solution de ce second problème est beaucoup moins avancée que celle du premier ; comme je l'ai dit plus haut, elle consiste à remplacer d'abord le système des équations proposées par un ou plusieurs systèmes composés chacun d'une équation à une inconnue, d'une équation à deux inconnues, etc. Or cette substitution n'a encore été tentée que pour le cas de deux équations à deux inconnues ; et ce que l'on possède de plus satisfaisant pour ce cas simple, le théorème de MM. Labatie et Sarrus, laisse encore à désirer : on sait, en effet, qu'il n'est pas permis de conclure de la démonstration connue de ce théorème, que, si une solution se trouve plusieurs fois dans le système des équations proposées, elle se trouvera le même nombre de fois en somme dans les divers systèmes que l'on veut substituer au premier, ce qui est un véritable inconvénient dans certaines applications de l'élimination.

Le but principal de ce mémoire est de faire voir que le théorème de MM. Labatie et Sarrus s'étend aux solutions multiples ; je parviens en outre à lever les diverses difficultés qui se rapportent à ces solutions et qui jusqu'ici ont toujours

---

(*) *Journal de l'École polytechnique*, onzième cahier, 1802, p. 199.

embarrassé les auteurs. Avant d'énoncer les résultats auxquels j'ai été conduit, je crois nécessaire de rappeler rapidement l'origine de la méthode généralement suivie pour résoudre deux équations à deux inconnues, et de faire connaître les principaux efforts qui ont été tentés pour affranchir cette méthode des difficultés qu'elle présente.

Soient deux équations à deux inconnues x et y; pour qu'une valeur de y convienne à ces deux équations, il est nécessaire et il suffit qu'en la substituant dans leurs premiers membres, on fasse acquérir à ces premiers membres un diviseur commun, fonction de x, et ce commun diviseur égalé à zéro donne une équation dont les racines sont les valeurs correspondantes de l'autre inconnue. Donc, si regardant y comme connu, on cherche le plus grand commun diviseur entre les premiers membres des équations proposées, on aura en égalant à zéro les deux derniers restes, d'une part l'équation finale en y et d'une autre l'équation à deux inconnues qui fournit les valeurs de x quand y est connu. Tel est le raisonnement qui a d'abord conduit à la méthode; mais il n'est pas besoin d'un grand effort d'attention pour reconnaître qu'il peut dans bien des cas être inexact. Supposons, en effet, qu'une des valeurs de y qui annulent le dernier reste, rende en même temps égal à zéro un des facteurs qui ont été introduits ou supprimés dans le courant du calcul, la valeur que prendra pour cette valeur de y l'avant-dernier reste, pourra très-bien ne pas être le plus grand commun diviseur des deux polynômes fonctions de x, obtenus en portant cette valeur de y dans les polynômes proposés; or c'est précisément sur cette hypothèse que repose la conclusion que l'on a tirée. Ainsi il n'est pas permis de dire que l'opération du plus grand commun diviseur appliquée aux premiers membres des équations proposées conduise immédiatement à la résolution de ces équations, comme on l'espérait d'abord; mais cette opération fait connaître une suite d'équations dont les degrés vont toujours en diminuant et dont les premiers membres sont liés aux premiers membres des équations proposées par des relations simples; et on doit naturellement se demander si on ne peut pas en tirer parti pour ramener la résolution du système des équations proposées à celle d'une suite d'autres systèmes de plus en plus simples, de manière à arriver ainsi de proche en proche à un système composé d'une équation à une inconnue et d'une équation à deux inconnues. C'est ce que l'on a tenté de faire comme il suit.

Supposons d'abord que dans l'opération du plus grand commun diviseur on n'ait ni introduit ni supprimé de facteurs en y, on aura une suite d'égalités de la forme suivante :

$$\begin{aligned} A &= BQ + R \\ B &= RQ_1 + R_1 \\ R &= R_1Q_2 + R_2 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ R_{n-2} &= R_{n-1}Q_n + R_n \end{aligned}$$

on verra alors aisément que les solutions du système $A=0$, $B=0$, sont les mêmes que celles du système $B=0$, $R=0$; que les solutions de ce dernier système sont les mêmes que celles du système $R=0$, $R_1=0$, et ainsi de suite; enfin, que les solutions du système $A=0$, $B=0$, sont les mêmes que celles du système $R_{n-1}=0$, $R_n=0$. C'est le résultat auquel nous étions parvenus par le premier raisonnement; ce qui, du reste, ne doit pas surprendre, puisque dans le cas que nous considérons on n'a ni introduit ni supprimé de facteur en y dans l'opération du plus grand commun diviseur.

Mais considérons le cas général, nous aurons alors les égalités :

$$cA = Bq + Rr$$
$$c_1B = Rq_1 + R_1r_1$$
$$c_2R = R_1q_2 + R_2r_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$c_nR_{n-2} = R_{n-1}q_n + r_n.$$

Or on pourra bien dire, comme dans le cas précédent, que les solutions du système $cA = 0$, $B = 0$, sont les mêmes que celles du système $B = 0$, $Rr = 0$, que les solutions du système $c_1B = 0$, $R = 0$, sont les mêmes que celles du système $R = 0$, $R_1r_1 = 0$, etc. Mais comment, en général, les solutions du système $c_pR_{p-2} = 0$, $R_{p-1} = 0$, dépendent-elles des solutions des deux systèmes $c_p = 0$, $R_{p-1} = 0$, et $R_{p-2} = 0$, $R_{p-1} = 0$, et les solutions du système $R_{p-1} = 0$, $R_pr_p = 0$, des solutions des deux systèmes $R_{p-1} = 0$, $R_p = 0$, et $R_{p-1} = 0$, $r_p = 0$? Les opinions ont été partagées sur ce point; quelques auteurs, à la tête desquels il faut mettre M. Bret (*V.* le *Journ. de l'École polytechn.*, cah. 15, et les *Annales* de M. Gergonne, t. III), ont admis, *sans démonstration*, qu'un système de la forme $AB=0$, $C=0$, pouvait toujours être remplacé par les deux systèmes $A = 0$, $C = 0$, et $B = 0$, $C = 0$, que ces deux systèmes eussent ou non des solutions communes; d'autres auteurs, au contraire, ont prétendu que la substitution au système $AB = 0$, $C = 0$ des deux systèmes $A = 0$, $C = 0$, et $B = 0$, $C = 0$ n'était permise que lorsque ces deux derniers systèmes n'avaient pas de solutions communes, et que dans le cas contraire on ne devait prendre qu'une fois la solution commune. On doit remarquer, du reste, que cette dernière hypothèse, que l'on doit à M. Lefébure de Fourcy (*V.* la correspondance de l'*École polytechnique* (*)), et qui a été généralement adoptée

(*) T. II, p. 276.

dans l'enseignement, malgré la complication qu'elle apportait dans les calculs, devait, en effet, être préférée dans l'incertitude où l'on était de la justesse de la première ; car la seule erreur que pût produire son adoption consistait dans le degré de multiplicité des solutions, ce qui avait peu d'importance dans un grand nombre de cas. Néanmoins je décide la question en faveur de l'hypothèse de M. Bret ; après avoir donné une définition nette et précise des solutions multiples, je démontre rigoureusement que le système $AB = 0$, $C = 0$, peut, dans tous les cas, être remplacé par les deux systèmes $A = 0$, $C = 0$ et $B = 0$, $C = 0$; j'établis ensuite une seconde propriété, que l'on avait jusqu'ici regardée comme évidente, mais qui n'a pas moins besoin de démonstration que la première, quand on considère les solutions multiples ; elle consiste en ce que, si l'on a la relation $A = Bq + C$, les solutions du système $A = 0$, $B = 0$, sont les mêmes que celles du système $B = 0$, $C = 0$; ces deux lemmes admis, je complète la théorie de M. Bret, puis cherchant à simplifier les résultats qu'elle fournit, je suis conduit d'une manière naturelle, et pour ainsi dire inévitable, au théorème de MM. Labatie et Sarrus, qui se trouve ainsi établi pour les solutions multiples aussi bien que pour les solutions simples.

Je dois dire avant d'entrer en matière que je ne m'occuperai dans ce qui va suivre ni des solutions entièrement infinies, ni des solutions en partie finies et en partie infinies ; on sait, du reste, que ces solutions peuvent se déterminer directement. Je représenterai aussi, pour abréger, par $[A, B]$ l'ensemble des solutions finies du système $A = 0$, $B = 0$. Enfin je supposerai toujours les équations à coefficients numériques.

§ I^{er}. *Définition des solutions multiples. — Détermination du degré de multiplicité des solutions.*

Soient :

$$(1)\quad A = f(x, y) = 0, \qquad (2)\quad B = f(x, y) = 0,$$

deux equations à deux inconnues x et y, et dont les premiers membres ne contiennent ni facteurs fonction de x, ni facteurs fonction de y, ni facteurs fonction de x et y, ainsi qu'on peut toujours le supposer. Si l'équation (1) est du degré m en x, et l'équation (2) du degré $n \overline{<} m$, et que l'on résolve ces équations par rapport à x, on trouvera pour la première m racines :

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_m,$$

et pour la seconde n racines :

$$y'_1,\ y'_2,\ y'_3,\ \ldots\ y'_n,$$

toutes fonctions de y, et qui pourront être, selon la valeur attribuée à y, finies ou infinies, réelles ou imaginaires. Remarquons seulement que si une racine de l'une des équations de réelle devient imaginaire, le même fait se présentera pour une autre racine de la même équation, et que ces deux racines, en passant du réel à l'imaginaire, passeront nécessairement par l'égalité; et que si, pour une certaine valeur de y, $y = b$, k racines de l'une des équations, de la première par exemple, deviennent infinies, ce qui arrivera lorsque les k premiers termes de cette équation, supposée ordonnée, s'annuleront pour $y = b$, les $m - k$ autres racines d'abord de la forme $\frac{0}{0}$, auront pour vraies valeurs les racines de l'équation obtenue en négligeant les k premiers termes de l'équation $A = 0$, et faisant dans les termes restants $y = b$. Ceci posé, supposons que $x = \alpha$,

$y = \beta$, forment une solution des équations proposées, c'est-à-dire représentent un système de valeurs de x et de y, vérifiant les équations proposées, si nous faisons $y = \beta$, dans les racines y_1, y_2, ... y_m de l'équation (1), et dans les racines y'_1, y'_2, ... y'_n de l'équation (2), un certain nombre de racines de l'une et de l'autre equation devront se réduire à α. Supposons que ces racines soient :

$$y_p, \ y_q, \ldots \ y_r,$$

et

$$y'_{p'}, \ y'_{q'} \ldots \ y'_{r'}.$$

Pour avoir le degré de multiplicité de la solution $x = \alpha$, $y = \beta$, on formera avec y_p, y_q, ... y_r et $y'_{p'}$, $y'_{q'}$, ... $y'_{r'}$, toutes les différences de la forme

$$y_p - y'_{p'}, \ y_q - y'_{p'}, \ \ldots, \ y_p - y'_{q'}, \ y_q - y'_{q'}, \ \ldots; \ \ldots$$

et la somme des degrés d'infiniment petit par rapport à $y - \beta$ (*) de ces différences, ou, ce qui revient au même, le degré d'infiniment petit de leur produit,

$$(y_p - y'_{p'}) \ (y_q - y'_{p'}) \ \ldots (y_p - y'_{q'}) \ (y_q - y'_{q'}) \ \ldots,$$

sera le degré de multiplicité cherché.

On peut encore obtenir ce degré de multiplicité d'une autre manière, comme il suit. Supposons d'abord que l'hypothèse $y = \beta$ n'annule pas le coefficient a_0 du terme de l'équation (1), qui contient x à la plus haute puissance, auquel cas les m racines y_1, y_2, ... y_m seront finies pour $y = \beta$. Comme l'on a généralement

$$A = f(x, y) = a_0 \ (x - y_1)(x - y_2) \ldots (x - y_m),$$

(*) On appelle degré d'infiniment petit par rapport à $y - \beta$ d'une fonction de y, $\varphi(y)$ qui s'annule avec $y - \beta$, l'exposant m de la puissance de $y - \beta$ pour laquelle la vraie valeur de $\dfrac{\varphi(y)}{(y-\beta)^m}$ correspondante à $y = \beta$, est différente de zéro et de l'infini.

on aura aussi, en substituant successivement $y'_{p'}, y'_{q'} \ldots y'_{r'} \ldots$ à la place de x,

$$f(y'_{p'}, y) = a_0 (y'_{p'} - y_1)(y'_{p'} - y_2) \ldots (y'_{p'} - y_m)$$
$$f(y'_{q'}, y) = a_0 (y'_{q'} - y_1)(y'_{q'} - y_2) \ldots (y'_{q'} - y_m),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(y'_{r'}, y) = a_0 (y'_{r'} - y_1)(y'_{r'} - y_2) \ldots (y'_{r'} - y_m),$$

et en multipliant

$$(a) f(y'_{p'}, y) f(y'_{q'}, y) \ldots f(y'_{r'}, y) =$$
$$= a_0^{\nu} (y'_{p'} - y_1)(y'_{p'} - y_2) \ldots (y'_{q'} - y_1)(y'_{q'} - y_2) \ldots$$
$$\ldots (y'_{r'} - y_1)(y'_{r'} - y_2) \ldots$$

ν étant le nombre des racines $y'_1, y'_2 \ldots y'_n$, qui se réduisent à α quand on fait $y = \beta$. Or les seuls facteurs du second membre infiniment petits avec $y - \beta$, sont $y_p - y'_{p'}$, $y_q - y'_{p'}, \ldots y_p - y_{q'}, y_q - y_{q'}; \ldots$ nous conclurons de là que le degré d'infiniment petit par rapport à $y - \beta$ du premier membre, aussi bien que celui du produit

$$(b) \quad (y_p - y'_{p'})(y_p - y'_{q'}) \ldots (y_q - y'_{p'})(y_q - y'_{q'}) \ldots$$

représente le degré de multiplicité de la solution $x = \alpha$, $y = \beta$.

Supposons maintenant que le coefficient a_0 du premier terme de l'équation (1) s'annule pour $y = \beta$, et que par conséquent quelques-unes des racines $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$ deviennent infinies pour la même hypothèse, nous ne pourrons plus dire alors que les seuls facteurs infiniment petits avec $y - \beta$ du second membre de l'équation (a) soient $y_p - y'_{p'}$, $y_p - y'_{q'}, \ldots y_q - y'_{p'}, y_q - y'_{q'}, \ldots$, puisque a_0^{ν} sera infiniment petit; néanmoins, comme il y aura en même temps dans le second membre des facteurs infiniment grands, le degré d'infiniment petit de ce second membre sera toujours le même que celui du produit (b). Pour le faire voir, je remarque que si dans une équation à une inconnue x

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Tx + V = 0,$$

dont les coefficients A, B, ... V dépendent d'un paramètre y, le coefficient du premier terme avec ou sans quelques coefficients suivants, se réduit à zéro pour une certaine valeur β du paramètre y, ce qui entraîne pour cette valeur de y l'existence d'un certain nombre de racines infinies dans cette équation ; le produit par A du produit de l'expression algébrique des racines qui deviennent infinies sera une quantité déterminée différente de zéro et de l'infini pour $y = \beta$. Soient, en effet, x_1, x_2, ... x_m l'expression algébrique des racines de l'équation proposée, et supposons que x, x_1, x_2 soient les racines qui deviennent infinies pour $y = \beta$. On a, quel que soit y,

$$Ax\, x_1 x_2 \ldots x_m = (Ax\, x_1 x_2)\ (x_3 \ldots x_m) = V\ ;$$

faisons converger y vers β, $(x_3 \ldots x_m)$ et V convergeront vers des quantités determinées; il en sera donc de même de (Axx_1x_2). Ce raisonnement est en défaut, il est vrai, lorsque parmi les racines x_3, ... x_m il s'en trouve qui deviennent nulles pour $y = \beta$, ou, ce qui revient au même, lorsque V est infiniment petit avec $y - \beta$, mais on peut toujours écarter ce cas, s'il se présentait, en augmentant toutes les racines d'un nombre fini convenable. Ceci posé, nous voyons facilement que le degré d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$ de $a_0{}^\nu$, sera toujours détruit par le degré d'infiniment grand des facteurs infinis qui se trouvent dans le second membre de l'égalité (a), et par conséquent que le degré d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$ de ce second membre est toujours le même que celui du produit (b).

(*La suite prochainement.*)