

ABEL TRANSON

**Sur le XXIV^e problème de l'arithmétique
universelle**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 458-461

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__458_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE XXIV^e PROBLÈME

de l'arithmétique universelle ()*.

PAR M. ABEL TRANSON.

PROBLÈME. *Par un point A donné à égale distance de deux droites rectangulaires OX, OY, mener une sécante telle que la partie BC interceptée par ces droites, soit égale à une ligne donnée m.*

Ce problème, qui offre, par la diversité de ses solutions, un précieux exercice aux commençants, est choisi comme exemple dans les livres élémentaires; mais il me semble qu'on n'en a pas tiré tout le parti possible.

Premièrement, si on appelle a la distance du point A à chacun des côtés de l'angle droit, on trouve, pour déterminer la longueur du segment OB intercepté par la ligne cherchée sur le côté OX, l'équation

$$(\alpha). \dots x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - m^2)x^2 + 2am^2x - a^2m^2 = 0;$$

Équation qu'on abandonne aussitôt pour chercher quelque solution plus simple; mais c'est bien à tort, car cette équation est propre à donner un exemple remarquable d'abaissement, et la construction des segments OB est aussi facile que celle de la plupart des lignes qu'on prend pour inconnues dans les autres solutions du même problème.

Remarquez, en effet, que les quatre segments sur l'axe OY sont égaux aux segments sur OX. Or, entre les deux

(*) V. t. III, p. 180 et 262.

segments OB et OC, que donne une même position de la ligne m , il y a une relation qu'on a dû écrire pour former l'équation (α); c'est

$$OB : OC :: OB - a : a.$$

Les racines de l'équation (α) satisfont donc par couples à la condition

$$x' : x'' :: x' - a : a;$$

c'est-à-dire à l'équation $x'x'' = a(x' + x'')$. — Ou, ce qui revient au même, on est assuré que l'équation (α) admet deux diviseur de la forme $x^2 - px + ap$.

On vérifie cette indication en identifiant le premier membre de (α) au produit

$$(x^2 - px + ap)(x^2 - p'x + ap');$$

et on trouve, en effet, qu'il suffit de poser $p + p' = 2a$, avec $pp' = -m^2$; de sorte que p et p' sont racines de l'équation

$$z^2 - 2az - m^2 = 0,$$

d'où on tire $p = a - \sqrt{a^2 + m^2}$; et $p' = a + \sqrt{a^2 + m^2}$.

Ainsi deux des segments OB sont racines de l'équation

$$x^2 - (a - \sqrt{a^2 + m^2})x + a(a - \sqrt{a^2 + m^2}) = 0,$$

et les deux autres de l'équation

$$x^2 - (a + \sqrt{a^2 + m^2})x + a(a + \sqrt{a^2 + m^2}) = 0.$$

Maintenant je vais rappeler sommairement les solutions dans lesquelles le choix de l'inconnue conduit à une équation du second degré seulement.

1° Solution de Pappus; c'est celle que M. Fontès a étendue au cas d'un angle quelconque dans sa *deuxième construction*. (*Nouv. Ann.*, t. VI, p. 184) (*).

(*) Pappus donne deux solutions; une par la conchoïde et l'autre par l'inter-

2° Première solution de Newton. On prend pour inconnue la distance entre le point A et le milieu de BC; voir tous les traités élémentaires.

3° Deuxième de Newton. Du milieu de BC on abaisse une perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle droit. Appelant y la distance entre l'origine O et le pied de cette perpendiculaire; b la demi-longueur de BC, et e la distance OA; la valeur de y dépend de l'équation extrêmement simple

$$2y^2 + ey = b^2$$

à laquelle on parvient en exprimant, au moyen des quantités e et y , la distance de A au milieu de BC; et substituant cette expression à la lettre x dans les équations de la solution précédente, n° 2.

4° Solution de M. Gergonne, rapportée dans le livre de M. Cirodde, étendue par M. Fontès au cas de l'angle oblique.

J'ignore si les deux solutions suivantes ont déjà été données quelque part.

5° Si on prend pour inconnue le rayon du cercle inscrit au triangle formé par les deux côtés de l'angle droit et la sécante BC, on trouve l'équation

$$2ar^2 + 2ar(m - a) - a^2m = 0,$$

et on pourrait former également l'équation relative à l'un des trois cercles ex-inscrits.

6° Enfin on peut prendre pour inconnue la distance z entre l'origine et le point D, où le cercle circonscrit rencontre la bissectrice. — Cette manière de résoudre le problème doit être remarquée comme comprenant, avec une

section d'une hyperbole équilatère et d'un cercle; sans mentionner le cas où le point est sur une bissectrice (liv. IV, prop. XXIII et XXX). Tm.

égale facilité, le cas d'un angle quelconque θ . — On arrive très-aisément à l'équation

$$z(z-e) = \frac{m^2(1-\cos\theta)}{2\sin^2\theta}$$

en appelant e la distance OA.
