

TERQUEM

**Question d'examen sur les racines carrées
des racines d'une équation algébrique**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 456-457

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__456_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN

sur les racines carrées des racines d'une équation algébrique.

—
Problème. Étant donnée une équation algébrique, trouver l'équation qui a pour racines les racines carrées prises avec un seul signe des racines de la proposée.

Équation du second degré.

Solution. Soit $x^2 - a_1x + a_2 = 0$ l'équation proposée, α^2, β^2 les racines.

Soit $x^2 - b_1x + b_2 = 0$, l'équation cherchée, ayant pour racines α et β , on a les relations connues $b_1^2 - 2b_2 = a_1$; $b_2^2 = a_2$; d'où $b_1 = \sqrt{a_1 + 2\sqrt{a_2}}$; $b_2 = \sqrt{a_2}$.

Exemple numérique : $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $a_1 = 5$; $a_2 = 4$; $b_1 = 3$; $b_2 = 2$.

Équation du troisième degré.

$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$, équation proposée; $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, les

trois racines ; $x^3 - b_1x^2 + b_2x - b_3 = 0$, équation cherchée ;
racines α, β, γ ;

$$\text{on a } \Sigma\alpha^2 = a_1 = b_1^2 - 2b_2 ; \Sigma\alpha\beta^2 = a_2 = b_2^2 - 2b_1b_3 ;$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = a_3 = b_3^2 ;$$

d'où $b_3 = \sqrt{a_3}$; éliminant b_1 , on obtient l'équation du quatrième degré

$$b_2^4 - 2a_2b_2^2 - 8a_3b_2 + a_2^2 + 4a_1a_3 = 0.$$

Exemple numérique : $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = 3$; $a_1 = 14$;
 $a_2 = 49$; $a_3 = 36$.

L'équation en b_2 est $b_2^4 - 98b_2^2 - 288b_2 + 385 = 0$; d'où
 $b_2 = 11$.

On procède de même pour les équations des degrés supérieurs.

Observations. 1. Si dans la proposée de degré m , on fait $x = y^2$, la transformée en y a pour racines les racines carrées des racines de la proposée, chacune prise avec les deux signes ; aussi la transformée est de degré $2m$ et les termes de rang pair, combinaisons impaires des racines, manquent.

2. Dans l'équation qu'on obtient par le procédé indiqué, les coefficients sont irrationnels. Faisant disparaître les radicaux, on est ramené au cas général.

3. On peut suivre la même marche pour calculer une équation ayant pour racines les racines d'indice donné quelconque des racines de la proposée.