

Université de Dublin

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 445-453

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__445_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNIVERSITÉ DE DUBLIN (*Voy.* p. 329).

Prix mathématique de l'évêque Law. Juin 1846 : questions.

En 1796, John Law, évêque d'Elphin, a donné au collège de Dublin 735 liv. st. (18,529 fr.) pour encourager les études mathématiques ; les exercices roulent sur l'algèbre, l'analyse appliquée et la trigonométrie sphérique. Le premier prix est de 25 liv. st. (630 fr.) et le second de 10 liv. st. (250 fr.) ; les deux professeurs de ce cours reçoivent chacun 5 liv. st. (125 fr.), pour retenir à dîner les deux autres examinateurs le jour de la distribution des prix. Parmi les lauréats devenus célèbres, on remarque Hamilton (William) en 1801 ; Jelett et Roberts (Michael) 1838, et Roberts (William) en 1839.

SIR WILLIAM HAMILTON, PROFESSEUR.

1. Si, dans un triangle sphérique ABC, le côté BC étant fixe, le sommet A décrit un arc AA' infiniment petit sur le petit cercle décrit du point B comme pôle ; abaissant du sommet A une perpendiculaire AE sur le côté opposé BC,

$$\text{on a } \frac{\sin BE}{\sin CE} = \frac{\text{angle } A'CA}{\text{angle } A'BA}.$$

2. De là, si dans deux triangles sphériques ABC, CBD, situés dans deux hémisphères opposés relativement à leur base commune BC, on a $AB \perp DB$; et $2 \text{ tang. } BC \cos ABC$

$= \cot AB + \cot BD$, A, C, D restant fixes, si B décrit un arc BB' infiniment petit sur un petit cercle ayant C pour pôle, on aura encore $AB'C = DB'C$.

3. De là, mêmes données, et mêmes conditions; le point E intersection des deux diagonales AD, BC du quadrilatère, et les points C' , C'' pieds des perpendiculaires abaissées de C sur les côtés AB, BD, sont sur un même grand cercle.

4. Mêmes conditions; A et D étant les deux foyers d'une ellipse sphérique passant par B; C est le pôle du petit cercle osculateur de l'ellipse en B.

5. De là, le grand cercle qui bissecte l'angle des deux rayons vecteurs d'une ellipse sphérique, est normal à l'ellipse.

6. De là, la tangente de la moitié de l'angle formé par deux rayons vecteurs est moyenne harmonique entre les tangentes des deux rayons vecteurs.

7. Si on élève au foyer une perpendiculaire à un rayon vecteur et qu'on la prolonge jusqu'à la normale, celle-ci sera divisée en deux segments par le point de l'ellipse extérieurement, et par le pôle du cercle osculateur intérieurement; les sinus des quatre segments forment une proportion par quotient.

8. La projection d'un arc normal (terminé au grand axe) sur chacun des deux rayons vecteurs est égale au demi-paramètre de l'ellipse, c'est-à-dire à la moitié de la corde qui passe par le foyer, perpendiculairement au grand axe.

9. De là, les tangentes des quatre arcs : 1° le demi-paramètre, 2° la normale, 3° la distance du foyer au centre, 4° le rayon de courbure, forment une progression géométrique continue.

10. Le rayon de courbure est vu sous un angle sphérique de chaque foyer; en général, l'un de ces angles est aigu et l'autre obtus; la somme algébrique des produits qu'on ob-

tient en multipliant la tangente trigonométrique d'un de ces angles par le sinus du rayon vecteur correspondant est nulle.

M. MAC CULLAGH, PROFESSEUR.

1. Un point P se meut dans un plan de manière que sa distance à une droite fixe, située dans le plan, divisée par sa distance à un point fixe F, situé hors du plan, donne un quotient constant ; démontrer que la droite FP décrit un cône droit, dont l'axe est perpendiculaire au plan déterminé par le point et la droite fixes.

2. De là, si une section faite dans une surface du second ordre passe par une directrice, et si F est le foyer correspondant à cette directrice, le cône qui a ce foyer pour sommet et la section pour base, est un cône droit.

3. Démontrer, par la propriété modulaire, que la somme des angles qu'un côté du cône fait avec ses lignes focales, est constante.

4. Démontrer, par la même propriété, que les sinus des angles que fait un côté du cône avec une ligne focale et le plan directeur correspondant, sont constantes.

5. Si dans une surface du second ordre une section parallèle à un plan tangent est une hyperbole, démontrer que le plan tangent coupe la surface suivant deux droites.

6. Trouver l'équation de la surface polaire réciproque d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde, relativement à une sphère.

7. Les surfaces qui sont polaires réciproques à deux ellipsoïdes de mêmes foyers relativement à la même sphère, ne peuvent se couper.

M. GRAVES, PROFESSEUR.

1. L'équation d'un ellipsoïde, rapporté à ses axes princi-

paux, étant $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (1); $a > b > c$, peut être ramenée à la forme $k^2(x^2 + y^2 + z^2 - b^2) - x^2 + m^2z^2 = 0$ (2), donner l'interprétation géométrique complète de l'équation (2).

2. L'équation (1) peut aussi être mise sous cette forme :

$$(x - x')^2 + y^2 + z^2 - r^2 - l^2 \left[\left(\frac{x}{m} - 1 \right)^2 - \frac{z^2}{n^2} \right] = 0 \quad (3);$$

les constantes m et n étant liées par l'équation $\frac{a^2}{m^2} + \frac{c^2}{n^2} = 1$; quels théorèmes géométriques sont compris dans l'équation (3)?

3. Un quadrilatère formé par quatre génératrices étant tracé sur un hyperboloïde à une nappe, les quatre sommets sont ceux d'un tétraèdre, dont les six faces étant rencontrées par une transversale, donnent six points en involution.

4. Un hexagone étant inscrit dans une ligne du 3^{ème} ordre, de manière que les trois intersections des côtés opposés soient sur la courbe, une transversale coupera les six côtés de l'hexagone et la courbe en neuf points en involution.

5. L'équation d'une courbe plane du 3^{ème} ordre peut être mise généralement sous la forme

$$(y - mx)(y - m'x)(y - m''x) + (ay^2 + bxy + cx^2 + dy)(\alpha x + \beta y - 1) = 0,$$

α et β étant pris arbitrairement, quelle propriété générale des courbes du 3^{ème} ordre est exprimée par cette équation?

6. Établir et prouver la propriété correspondante des surfaces du 3^{ème} degré.

7. Le théorème énoncé en 5 donne un moyen simple de construire le cercle osculateur en un point donné d'une ligne plane du 3^{ème} ordre.

8. Étant donnés la base c et l'angle opposé C d'un triangle sphérique ABC , démontrer que l'on a

$$\sin s'da + \sin sdb = \sin cdp ;$$

p est la perpendiculaire abaissée de C sur c , s et s' sont les angles adjacents à a et b , dans lesquels p divise C .

9. De là dériver la formule pour la comparaison des fonctions elliptiques de seconde espèce.

10. $U = 0$ étant l'équation d'une courbe plane du $n^{\text{ème}}$ ordre, trouver l'équation générale d'un diamètre donné, conjugué à un système de cordes parallèles à la droite $y = mx$.

11. Tous les diamètres de l'ordre $n - 1$ passent à travers les mêmes $(n - 1)^2$ points.

12. Trouver l'enveloppe de tous les diamètres de l'ordre $n - 2$ et démontrer que cette enveloppe passe par tous les points d'osculation de la courbe (c'est le nom qu'on donne aux points où la tangente a quatre points consécutifs en commun avec la courbe).

Concours Lloyd.

Fondé par souscription en 1839, en commémoration des vertus et des talents de Lloyd, prévôt de l'Université. En 1847, la souscription se montait à 1,075 liv. st.; rapporte un dividende semestriel de 18 liv. st., donné en prix. L'examen roule sur les mathématiques et la physique.

M. MAC CULLAGH, PROFESSEUR.

1. Si $(1 - 2ap + a^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + aP_1 + a^2P_2 + \dots$ où P_1, P_2 sont indépendants de a ; exprimer P_n en fonction de n et de p .

2. Si dans le développement ci-dessus, p est le cosinus d'un angle, démontrer que la valeur de P_n est entre les limites ± 1 .

3. Si $\frac{1 - a^2}{(1 - 2ap + a^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + aP_{(1)} + a^2P_{(2)} + \dots$, démontrer que $P_{(n)} = (2n + 1)P_n$.

4. Soit A un point situé à une distance a du centre d'une

sphère de rayon r , si s est la somme des quotients de chaque élément superficiel de la sphère divisé par le cube de sa distance au point A, la somme étant prise entre les valeurs ρ et ρ' de cette distance, l'on a $s = \frac{2\pi r}{a} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right)$.

5. C et C' étant les extrémités d'une corde inscrite dans une conique, dont F est le foyer et P le point où la tangente est parallèle à la corde, la différence des distances focales FC, FC' est égale à la corde CC', multipliée par le cosinus de l'angle θ que la corde fait avec la droite FP; démontrer ceci par la propriété de la directrice.

6. Q étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M, milieu de CC' sur FP, alors FQ est la moitié de la somme de FC et FC'.

7. N étant le point d'intersection de FP et CC', on a $\overline{FN}^2 = s^2 - c^2$; $2s = FC + FC'$; $2c = CC'$.

8. Ensuite si f est la moitié de la corde passant par F parallèlement à CC', s, c, f étant donnés, FP sera donné.

9. Si n est le point où une autre corde parallèle à CC' coupe FP, et si Fn, ainsi que les longueurs s, c, f sont données, la corde passant par n sera donnée, ainsi que la somme des distances de ses extrémités à F.

10. De là si s, c, f sont donnés, l'aire du segment renfermé entre la corde CC' et l'arc curviligne CPC' est proportionnelle au sinus de l'angle θ ; il en est de même de l'aire du secteur formé par les droites FC, FC' et l'arc CPC'.

11. Dans une section conique, le produit $f \sin^2 \theta$ est égal au demi-paramètre.

12. s, c, f étant donnés, si la conique est décrite par un point attiré vers le foyer F, le temps mis à décrire l'arc CPC' est donné. (Cet énoncé comprend les trois cas du théorème de Lambert.)

13. Lorsque le point P est au milieu de NQ, la courbe est

une parabole, et l'on a $f^2 + c^2 = 2fs$; la courbe est une ellipse ou une hyperbole, selon que $f^2 + c^2$ est inférieur ou supérieur à $2fs$.

14. Dans les deux derniers cas, l'axe focal est donné si s, c, f sont connus. (Les propriétés précédentes sont à prouver géométriquement.)

15. x, y sont les coordonnées d'un point P d'une ellipse donnée par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; soient x', y' les coordonnées d'un point fixe, dans ce plan. La longueur d'une droite menée par le point fixe (x', y') parallèlement à FP et terminée à la tangente menée par P, est égale à $a \left[1 - \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} \right]$, et cette longueur est proportionnelle à la distance de P à la polaire du point fixe (x', y') .

M. GRAVES, PROFESSEUR.

1. $\frac{x^2}{t-a^2} + \frac{y^2}{t-b^2} + \frac{z^2}{t-c^2} + -1 = 0$ étant une équation en t , prouver que si $a > b > c > \text{etc.}$, les limites des racines sont $a^2, b^2, c^2, \text{etc.}$; ainsi toutes les racines sont réelles et inégales.

2. λ^2, μ^2, ν^2 sont les trois racines de l'équation en t , $\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{t-b^2} + \frac{z^2}{t-c^2} = 1$, exprimer x, y, z en fonction de λ, μ, ν, b et c .

3. $F(k)$ étant une fonction rationnelle et entière du degré n de k , décomposer $\frac{k^m}{F(k)}$ en fractions partielles; on a $m < n$.

4. De là nous pouvons tirer immédiatement la solution de ce système d'équations :

$$\begin{aligned}x + y + z + \dots t &= 1 \\ax + by + cz + \dots bt &= k \\a^2x + b^2y + c^2z + \dots b^2t &= k^2 \\&\dots \\a^{n-1}x + b^{n-1}y + c^{n-1}z + \dots b^{n-1}t &= k^{n-1}.\end{aligned}$$

5. Développer $\frac{x}{c^x - 1}$ dans une série suivant les puissances ascendantes de x .

6. Trouver les intégrales $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ et $\int \frac{dx}{\sin^n x}$, n étant un nombre entier.

7. Déterminer sur la sphère un point tel que la somme des cosinus des distances de ce point à un nombre quelconque de points fixes sur la sphère, soit un maximum.

8. P est un point quelconque pris dans le plan de deux cercles donnés; P' est le point d'intersection des deux polaires de P, relativement aux deux cercles; P et P' sont dits *points réciproques*. Prouver que l'axe radical passe par le milieu de PP'.

9. D'un point P d'une conique à centre, soient menées deux cordes PA, PB parallèles à deux diamètres égaux, le cercle passant par A, B et P touche la conique en P, et a pour rayon $\frac{r^2}{p}$; r étant le demi-diamètre auquel une des cordes est parallèle, et p la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en P.

10. Dédire de là la formule connue pour le rayon de courbure.

11. Un côté d'un triangle inscrit dans un cercle est donné de direction, un second côté est assujéti à passer par un point donné; quel est le lieu du pôle du troisième côté?

12. D'un point P d'une conique, abaissez les perpendiculaires p, p', p'' sur une corde TT' et sur les deux tan-

gentes TS , $T'S$ menées par les extrémités; démontrer que l'on a $\frac{P'P''}{P'} = \frac{\pi'\pi''}{\pi}$; π' , π'' , π étant les perpendiculaires abaissées du centre de la section sur TS , TS' , et sur la tangente parallèle à TT' .

13. Soit une tangente menée en P et des perpendiculaires π , π' , π'' abaissées sur cette tangente de S , T et T' , prouver que $\pi' \cdot \pi'' = \pi^2$.

14. Prouver que $\frac{P'P'}{\pi' \pi''} = \frac{\pi' \pi''}{\pi^2}$; τ étant la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en P .
