

Sur la conversion des séries en produits d'un nombre infini de facteurs, d'après M. Stern

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 437-438

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__437_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONVERSION DES SÉRIES EN PRODUITS

d'un nombre infini de facteurs, d'après M. Stern

(Crelle, t. XII, p. 353) en français.

—

I. Étant donnée la série

$$S = 1 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots \quad (1)$$

on peut la convertir immédiatement en un produit. En effet, on a

$$S = (1 + A_1) \frac{(1 + A_1 + A_2)}{1 + A_1} \frac{(1 + A_1 + A_2 + A_3)}{1 + A_1 + A_2} \frac{(1 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4)}{1 + A_1 + A_2 + A_3} \dots \quad (2)$$

« Les deux expressions sont identiques, c'est-à-dire que si l'on ajoute un certain nombre de premiers termes de la

» série donnée, on obtient la même valeur qu'on obtien-
 » drait en calculant la valeur du produit correspondant par
 » le même nombre de facteurs, de manière qu'une série con-
 » vergente mène toujours à un produit convergent. »

Soit la série :

$$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4},$$

on la convertit par la formule (2) en celle-ci :

$$e = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{206}{205} \dots$$

où le $n^{\text{ème}}$ facteur étant $\frac{a}{b}$, le $n+1^{\text{ème}}$ est $\frac{(n+2)a+1}{(n+2)a}$,

de même, $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5};$

d'où $\log 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1.3} \cdot \frac{14}{4.5} \cdot \frac{94}{5.14} \cdot \frac{444}{6.94}.$

Le $n^{\text{ème}}$ facteur étant $\frac{a}{b}$, le $n+1^{\text{ème}}$ est $\frac{(n+1)b+a}{(n+2)a}.$

II. Par les considérations précédentes, on peut changer *vice versa* un produit d'un nombre infini de facteurs en série ; soit

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} \dots \frac{a_n}{b_n} \dots \quad (3)$$

Comparant avec la formule (2), on a

$$\frac{a_1}{b_1} = 1 + A_1; \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{1 + A_1 + A_2}{1 + A_1} \dots$$

d'où $A_1 = \frac{a_1 - b_1}{b_1}; \quad A_2 = \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_2 - b_2}{b_2},$

et en général $A_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1}}{b_1 \cdot b_2 \dots b_{n-1}} \cdot \frac{a_n - b_n}{b_n},$ formule déjà donnée par M. Schweins.