AMIOT

Discussion des valeurs générales fournies par la résolution de trois équations du premier degré entre trois inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 407-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__407_1>

DISCUSSION

Des valeurs générales fournies par la résolution de trois équations du premier degré entre trois inconnues.

PAR M. AMIOT.

(Extrait du Précis analytique des travaux de l'Académie de Rouen, 1842.)

—

1. Il suffit de parcourir un traité d'algèbre pour être frappé, dès le commencement, d'une lacune importante. On trouve, en effet, à la suite des différentes méthodes usitées pour la résolution des équations du premier degré, une discussion complète des valeurs générales fournies, soit par une équation à une seule inconnue, soit par deux équations à deux inconnues; mais là s'arrête ordinairement toute discussion. Certains auteurs présentent, il est vrai, quelques remarques générales sur les valeurs fournies par trois équations entre trois inconnues, mais aucun, à ma connaissance du moins, ne donne une véritable discussion des circonstances

diverses de compatibilité ou d'incompatibilité que peut offrir un système de trois équations entre trois inconnues (*).

Cette discussion serait-elle donc jugée trop peu importante pour prendre place dans un traité élémentaire ? Mais, quand on applique l'analyse à la géométrie aux trois dimensions de l'espace, la discussion des coordonnées de l'intersection de trois plans donnés par leurs équations, suppose connue la discussion algébrique des valeurs générales fournies par ces trois équations ; et, pour les surfaces du deuxième ordre, la distinction entre celles qui sont douées de centre et celles qui en sont dénuées, repose entièrement sur cette même discussion. Aussi, dans la plupart des traités de géométrie analytique, admet-on comme prouvés, en algèbre, plusieurs résultats dont la démonstration ne se trouve pas dans les traités spéciaux. Il y a donc là une véritable lacune qu'il importe de combler. C'est dans ce but que j'ai entrepris ce travail et que j'ai l'honneur de le présenter à l'Académie.

Je ferai d'abord observer qu'il ne me paraît pas possible d'entrer dans la discussion complète de trois équations à trois inconnues, en ne considérant que les valeurs générales des inconnues, attendu que des circonstances fort différentes d'indétermination, par exemple, peuvent se traduire par une même forme des inconnues. Aussi, aux valeurs générales ordinaires, j'ai joint des inconnues auxiliaires, qui m'ont permis d'entrer dans toutes les particularités de la question. Ces inconnues auxiliaires ne sont autres que les valeurs des coefficients indéterminés dont on fait ordinairement usage par la méthode d'élimination due à Bezout. Toutefois, j'ai apporté à cette méthode une modification indiquée par M. Poulet-Delisle, qui consiste à multiplier chaque équation par un coefficient indéterminé.

On a ainsi trois inconnues auxiliaires, qui, pour chaque

(*) V. *Manuel d'algèbre*, p. 222, 2e édit. Tm.

cas, ne dépendent que de deux équations. On peut donc en prendre une arbitrairement, et par conséquent la choisir de telle sorte que les autres soient entières. Il en résulte plus de simplicité dans les calculs, et surtout plus de symétrie dans la discussion.

2. Soient les trois équations générales :

$$(1)\quad ax+by+cz=d,$$
$$(2)\quad a'x+b'y+c'z=d',$$
$$(3)\quad a''x+b''y+c''z=d''.$$

Je les multiplie respectivement par les indéterminées m, n, p, j'ajoute les deux premières, et je soustrais la troisième, ce qui me donne :

$$(4)\quad (am+a'n-a''p)x+(bm+b'n-b''p)y+(cm+c'n-c''p)z=$$
$$=dm+d'n-d''p.$$

Je puis supposer m, n et p, déterminées de manière que l'on ait :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} bm+b'n=b''p,\\ cm+c'n=c''p,\end{array}\right. \text{ d'où je déduis } \left\{\begin{array}{l} m=c'b''-b'c''\\ n=bc''-cb''\end{array}\right.$$

en posant $p=bc'-cb'$.

On obtient ainsi :

$$(6)\quad x=\frac{dm+d'n-d''p}{am+a'n-a''p}$$
$$=\frac{d'(c'b''-b'c'')+d'(bc''-cb'')+d''(cb'-bc')}{a(c'b''-b'c'')+a'(bc''-cb'')+a''(cb'-bc')}.$$

Je puis pareillement supposer qu'on attribue à m, n et p des valeurs qui annulent les coefficients de x et z, et l'on a :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} am+a'n=a''p,\\ cm+c'n=c''p,\end{array}\right. \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} m=c'a''-a'c''\\ n=ac''-ca''\end{array}\right.$$

en posant $p=ac'-ca'$

Et il vient :

$$(8)\quad y=\frac{dm+d'n-d''p}{bm+b'n-b''p}$$
$$=\frac{d(c'a''-a'c'')+d'(ac''-ca'')+d''(ca'-ac')}{b(e'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')+b''(c'a-ac')}$$

Enfin, disposant de m, n, et p de manière à annuler les coefficients de x et y, ce qui donne :

$$(9)\quad \begin{cases} am + a'n = a''p \\ bm + b'n = b''p \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} m = b'a'' - a'b'' \\ n = ab'' - ba'' \end{cases}$$

en posant $p = ab' - ba'$

On obtient :

$$(10)\quad z = \frac{dm + d'n - d''p}{cm + c'n - c''p}$$

$$= \frac{d(b'a'' - a'b'') + d'(ab'' - ba'') + d''(ab' - ba')}{c(b'a'' - a'b'') + c'(ab'' - ba'') + c''(ab' - ba')}.$$

3. Ces valeurs générales de x, y et z, substituées dans les équations (1), (2) et (3), jouissent toujours de la propriété de les vérifier analytiquement. Mais, d'après les valeurs particulières attribuées aux coefficients a, b, c, d, a', b'.... celles des inconnues x, y et z, peuvent affecter diverses formes, suivant que les équations sont compatibles, distinctes, incompatibles, ou conséquence les unes des autres. Ce que je me propose, dans cette discussion, c'est d'établir des caractères d'après lesquels on puisse, dans tous les cas, déduire la signification des équations (1), (2) et (3) des valeurs trouvées pour x, y et z, en y joignant, au besoin, celles des inconnues auxiliaires m, n et p. Je distinguerai plusieurs cas :

Premier cas. Je supposerai d'abord qu'aucune des valeurs inconnues auxiliaires m, n ou p, ne soit égale à zéro dans chacun des systèmes (5), (7) et (9). Il peut arriver alors que les valeurs générales de x, y et z soient toutes les trois finies et déterminées, infinies ou indéterminées.

4. 1° Je suppose que les valeurs de m, n et p, déduites des deux équations $\begin{cases} mb+nb'=pb'' \\ mc+nc'=pc'' \end{cases}$ ne vérifient pas $ama'+n=a''p$, le dénominateur commun des valeurs de x, y et z sera différent de zéro, et les valeurs de ces inconnues seront toutes les trois finies et déterminées. Les trois équations proposées

seront distinctes et compatibles. Si les valeurs des inconnues sont positives, elles répondront *généralement* à la question dont les équations sont la traduction algébrique ; à moins, toutefois, que cette question ne renferme quelques conditions non exprimées dans les équations, et auxquelles ne puissent satisfaire les valeurs trouvées pour les inconnues, comme serait, par exemple, celle de n'admettre que des valeurs entières, lorsque l'on trouverait pour x, y et z des nombres fractionnaires. Si une ou plusieurs de ces valeurs sont négatives, on sait que, prises toutes positivement, elles conviendront généralement, non à la question telle qu'elle a été mise en équation, mais à cette question modifiée dans son énoncé, ou simplement mise autrement en équation, de telle manière que l'on obtienne de nouvelles équations différant de celles qu'on a résolues par le signe de tous les termes qui renferment celles des inconnues qui ont été trouvées négatives.

5. 2° Si les valeurs de m, n et p, tirées des deux équations $\left\{\begin{array}{l} mb+nb'=pb'' \\ mc+nc'=pc'' \end{array}\right.$ vérifient $am+a'n=pa''$, et ne vérifient pas la relation $md+nd'=pd''$, les valeurs de x, y et z seront infinies toutes les trois ensemble. Alors les équations (1), (2) et (3) seront incompatibles, car l'équation (4), qui peut être substituée à l'une d'elles, devient, quand on y remplace m, n et p par leur valeur

$$0.x+0.y+0.z=dm+d'n-pd'',$$

équation absurde d'après l'hypothèse. Ainsi, les équations proposées sont incompatibles toutes trois ensemble ; mais je dis *qu'elles sont compatibles deux à deux, et forment, par conséquent, trois systèmes distincts chacun de deux équations compatibles et indéterminées.* En effet, en ne considérant que les équations (1) et (2), par exemple, on en tirera, après avoir posé $d-ax=k$, et $d'-a'x=k'$

$$y=\frac{kc'-ck'}{bc'-cb'} \text{ et } z=\frac{bk'-kb'}{bc'-cb'}.$$

Valeurs nécessairement finies et déterminées, quelle que soit x, puisque $bc'-cb'$, qui est la valeur de p dans le système (5), est supposée différente de zéro. On verrait de même que les équations (1) et (3), puis (2) et (3), forment des systèmes compatibles. Mais chacun de ces systèmes ne renfermant que deux équations, et comprenant trois inconnues, admet une infinité de solutions.

6. 3° Je suppose, enfin, que les valeurs de m, n et p, déduites de $\begin{cases} mb+nb'=pb'' \\ nc+nc'=pc'' \end{cases}$ vérifient aussi à la fois les deux relations $am+a'n=pa''$ et $dm+d'n=pd''$, les valeurs de x, y et z seront toutes trois de la forme $\frac{0}{0}$; je dis que, dans cette hypothèse, *l'une des équations proposées sera conséquence des deux autres, et que, par conséquent, le système proposé se réduira à un seul système de deux équations entre trois inconnues.* En effet, l'équation (4) pouvant toujours être substituée à (3), par exemple, on aura, au lieu du système proposé, les équations (1) et (2), et $0.x+0.y+0.z=0$; cette dernière équation étant vérifiée évidemment par tout système de valeurs de x, y et z, qui vérifient (1) et (2), est une conséquence de celles-ci, et par conséquent, il ne reste que les équations (1) et (2), entre les trois inconnues x, y et z. On verrait, d'ailleurs, comme au numéro précédent, qu'elles sont compatibles.

7. Les équations (1), (2) et (3) peuvent toujours être considérées comme représentant trois plans; les valeurs générales de x, y et z sont les coordonnées de leur point d'intersection. Dans la première hypothèse, celle de x, y et z finies

et déterminées, les trois plans se coupent en un même point, lequel est le sommet d'un angle trièdre, dont les trois plans donnés sont les trois faces.

Dans la deuxième, celle de x, y et z infinies, les trois plans ne se coupent plus en un même point, mais ils se coupent deux à deux, suivant trois droites parallèles; ils forment ensemble un prisme triangulaire.

Enfin, dans le cas de x, y et z de la forme $\frac{0}{0}$, les trois plans se coupent suivant une seule et même droite, laquelle est complétement déterminée par deux quelconques des plans qui la contiennent.

7. *Deuxième cas.* Je suppose nulle une seule des valeurs de m, n ou p, dans un seul des systèmes (5), (7) ou (9). Soit par exemple $p=bc'-cb'=0$, dans le système (5). On ne pourra plus, dans cette hypothèse, substituer l'équation (4) à l'une quelconque des équations (1), (2) et (3). Car l'hypothèse $p=o$ en fait une combinaison des deux seules équations (1) et (2). C'est qu'effectivement ces deux équations sont suffisantes pour faire connaître x; car, de $bc'-cb'=o$, on déduit $b'=br$ et $c'=cr$, en posant $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=r$, et, par la substitution de ces valeurs, l'équation (2) devient $a'x+r(by+cz)=d'$, laquelle, combinée avec (1), donne immédiatement $x=\frac{dr-d'}{ar-a'}$, valeur finie et déterminée. En effet, $ar-a'=\frac{ab'-ba'}{b}$, quantité essentiellement différente de zéro, puisqu'on suppose la valeur de p du système (9) différente de zéro.

Les valeurs de y et z sont aussi finies et déterminées, car, si l'on remplace x par la valeur précédente dans les équations (1) et (3), elles deviennent de la forme $by+cz=k$ et $b''y+c''z=k'$, et l'on en déduit $y=\frac{kc''-k'b''}{bc''-cb''}$ et

$z = \frac{bk' - kb''}{bc'' - cb''}$ valeurs nécessairement finies et déterminées, puisque l'on suppose la valeur de n du système (5) différente de zéro.

Si, d'ailleurs, on introduit l'hypothèse $bc' = cb'$ et $b' = brc' = cr$ dans la valeur générale des inconnues, on a d'abord

$$x = \frac{dr(cb'' - bc'') + d'(bc'' - cb'')}{ar(cb'' - bc'') + a'(bc'' - cb'')}$$
$$= \frac{(dr - d')(cb'' - bc'')}{(ar - a')(cb'' - bc'')} = \frac{dr - d'}{ar - a'}.$$

Quant à celles de y et z, leurs numérateurs n'éprouvent aucune modification importante, mais leur dénominateur commun devient $(ar - a')(bc'' - cb'')$, et ne peut être nul, puisque chacun des facteurs $ar - a'$ et $bc'' - cb''$, est supposé différent de zéro.

Ainsi, dans cette hypothèse, *les valeurs de x, y et z, qui vérifient les équations* (1), (2) *et* (3), *sont finies et déterminées ; les équations sont distinctes et compatibles ;* elles représentent trois plans qui se coupent en un même point.

8. *Troisième cas.* Je suppose nulles deux des valeurs de m, n ou p, dans un seul des systèmes (5), (7) ou (9). Soit, par exemple, $m = 0$ et $p = 0$ dans (5); de $bc' = cb'$ et $b'c'' = c'b''$, on déduit $bb'c'c'' = cb'c'b''$ ou $bc'' = cb''$, et partant, on a aussi $n = o$ dans le même système. Dans cette hypothèse, l'équation (4) n'offre aucun sens, et la valeur générale de x est $\frac{0}{0}$, tandis que celle de y et z se présentent sous la forme de $\frac{0}{0}$ ou de ∞.

Pour interpréter ces valeurs, remontons aux équations proposées et observons que l'on a $b' = br$, $c' = cr$, $b'' = r'b$ et $c'' = r'c$, en posant $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = r$ et $\frac{b''}{b} = \frac{c''}{c} = r'$. Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (2) et (3), le système proposé devient :

$$
\begin{array}{lll}
(1) & ax + by + cz = d & ax + v = d \\
(2) & a'x + r(by + cz) = d' \quad \text{ou bien} & a'x + rv = d' \\
(3) & a''x + r'(by + cz) = d'' & a''x + r'v = d''
\end{array}
$$

En posant, pour abréger, $v = by + cz$.

On peut éliminer v ou y et z, soit entre (1) et (2), soit entre (1) et (3), soit enfin entre (2) et (3); on obtient ainsi les trois valeurs de x :

$$x = \frac{rd - d'}{ar - a'}, \quad x = \frac{r'd - d''}{r'a - a''}, \quad x = \frac{r'd' - rd''}{r'a' - ra''}.$$

Lesquelles sont nécessairement finies et déterminées. Car on a $ar - a' = \dfrac{ab' - a'b}{b}$, et cette quantité ne peu être nulle, puisque nous supposons la valeur de p du système (9) différente de zéro. On verra, de même, que les dénominateurs des deux autres valeurs de x ne peuvent être nuls.

A chacune de ces trois valeurs de x, on devra joindre une infinité de valeurs de y et z, astreintes à la seule condition de vérifier l'équation en y et z résultant de la substitution de x dans la troisième équation du système proposé. Ainsi, ce système se décomposera dans les trois suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{rd - d'}{ar - a'} \\ by + cz = v, \text{ en posant } v = d - a\dfrac{rd - d'}{ar - a'} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{r'd - d''}{r'a - a''} \\ by + cz = v', \text{ en posant } v' = \dfrac{d'}{r} - \dfrac{a'(r'd - d'')}{r(r'a - a'')} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{r'd' - rd''}{r'a' - ra''} \\ by + cz = v'', \text{ en posant enfin } v'' = \dfrac{d''}{r'} - \dfrac{a''(r'd' - rd'')}{r'(r'a' - ra'')}. \end{array}\right.$$

Ainsi, dans cette hypothèse, *les trois équations proposées sont incompatibles toutes trois ensemble; mais, en les réunissant deux à deux, on a trois systèmes de deux équations compatibles.* Elles représentent trois plans, qui se coupent deux à deux, suivant des droites parallèles, et de plus parallèles au plan des (y, z).

9. Il peut arriver que ces trois systèmes soient distincts, ou se confondent en un seul. En effet, les trois valeurs précédentes de x seront toutes trois différentes, ou bien toutes les trois égales entre elles, car, en égalant une de ces valeurs successivement à chacune des deux autres, on trouve la même condition :

$$d'a''-a'd''+r(ad''-da'')+r'(da'-ad')=0.$$

Si, en supposant cette relation satisfaite, on y remplace r et r' par leurs valeurs, on trouve :

$$b(d'a''-a'd'')+b'(ad''-da'')+b''(da'-ad')=0$$

ou $$c(d'a''-a'd'')+c'(ad''-da'')+c''(da'-ad')=0,$$

quantités qui ne sont autres que les numérateurs des valeurs générales de y et z. Or, nous savons que le dénominateur de ces mêmes valeurs est nul; *donc les trois systèmes précédents seront distincts ou se réduiront à un seul, suivant que les valeurs de* y *et* z (8) *et* (10), *seront de la forme* ∞ *ou de celle* $\frac{0}{0}$. *Dans le premier cas, on aura trois droites distinctes*, et, dans le second, ces trois droites se confondront en une seule.

10. *Quatrième cas.* Je suppose qu'une seule des valeurs de m, n ou p soit nulle dans deux des systèmes (5), (7) ou (9); soit, par exemple, $p=0$ dans (5) et (7), on aura $bc'=cb'$ et $ac'=ca'$, d'où résulte $ab'=ba'$, et partant la valeur p sera aussi nulle dans le système (9). Si l'on pose

$$\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{a'}{a}=r,$$

l'équation (4) devient $(m+nr)(ax+by+cz-d)=0$, laquelle est identique, quelles que soient les valeurs qu'on attribue à x, y et z puisque les valeurs de m et n, de chacun des systèmes (5), (7) et (9), satisfont à la relation $m+nr=0$.

Si, dans l'équation (2), on remplace a', b' et c' par les valeurs ar, br et cr, on a $r(ax+by+cz)=d'$, équation qui est incompatible avec (1), ou qui en est une conséquence, suivant que $\frac{d'}{v}$ égale ou n'égale pas d. Par suite de ces mêmes hypothèses, les valeurs générales de x, y et z deviennent

$$x=\frac{d(b''c'-c''b')+d'(bc''-cb'')}{a(b''c'-c''b')+a'(bc''-cb'')}$$

$$=\frac{(bc''-cb'')(d'-dr)}{(bc''-cb'')(a'-ar)}=\frac{d'-dr}{a'-ar}.$$

$$y=\frac{d(c'a''-a'c'')+d'(ac''-ca'')}{b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')}$$

$$=\frac{(dr-d')(ca''-ac'')}{(br-br)(ca''-ac'')}=\frac{dr-d'}{0}$$

$$z=\frac{d(b'a''-a'b'')+d'(ab''-ba'')}{c(b'a''-a'b'')+c'(ab''-ba'')}$$

$$=\frac{dr-d')(ba''-ab'')}{(cr-cr)(ba''-ab'')}=\frac{dr-d'}{0},$$

valeurs toutes trois infinies, si d' est différent de dr, c'est-à-dire si les équations (1) et (2) sont incompatibles, et toutes trois de la forme $\frac{0}{0}$, si $dr=d'$, ou si (1) et (2) sont conséquences l'une de l'autre.

Dans le premier cas, chacune des équations (1) *et* (2), *jointes à l'équation* (3), *forment deux systèmes compatibles et distincts.* En effet, si l'on attribue, dans (1) et (3), par exemple, une valeur quelconque à x, on aura

$$y=\frac{kc''-ck'}{bc''-cb''} \text{ et } z=\frac{bk'-kb''}{bc''-cb''},$$

valeurs nécessairement finies et déterminées, puisque la valeur de n, dans le système (5), est supposée différente de zéro. On verrait de même que les équations (2) et (3) forment un système compatible. Ces deux systèmes se réduiront à un seul, si les équations (1) et (2) sont conséquence l'une de l'autre. Donc, dans l'hypothèse présente, *les équations* (1), (2) *et* (3) *se réduisent à deux systèmes de deux équations compatibles et distinctes, ou bien à un seul système, suivant que les valeurs générales des inconnues sont infinies ou indéterminées.* Elles représentent, dans le premier cas, trois plans, dont deux sont parallèles, et coupent par conséquent le troisième suivant deux droites parallèles; dans le deuxième cas, les deux plans parallèles sont confondus en un seul.

11. Si, avec les trois valeurs de p nulles, on suppose $m=0$ dans (5), il en résulte $n=0$, et les valeurs de y et z, tirées de (1) et (3), sont infinies, quelle que soit la valeur attribuée à x. Mais on verrait aisément que les valeurs de x et z, par exemple, pour une valeur quelconque attribuée à y, seront finies et déterminées. C'est qu'alors les intersections du troisième plan, par les deux premiers, sont parallèles au plan des y, z. On verra, comme au numéro précédent, que ces deux droites sont distinctes, ou se réduisent à une seule, et que, par conséquent, *le système des équations proposées se réduit à deux systèmes, ou à un seul système de deux équations, suivant que les valeurs générales des inconnues seront de la forme* ∞ *ou* $\frac{0}{0}$.

12. *Cinquième cas.* Je suppose enfin que les valeurs de deux indéterminées m, n, p soient nulles dans deux des systèmes (5), (7), (9). Soient, par exemple, m et p nuls dans (5) et (7), on aura $c'b''=b'c''$ et $bc'=cb'$ avec $c'a''=a'c''$, et $ac'=ca'$. On en déduira $bc''=cb''$, $ac''=ca''$, $b'a''=a'b''$, $ab''=ba''$ et $ab'=ba'$, et partant les valeurs des auxiliaires m, n et p seront toutes nulles dans les trois systèmes (5), (7)

et (9). Dans ce cas, l'équation (4) devient $0.x+0.y+0.z=0$, et n'offre aucun sens.

Quant aux valeurs générales des inconnues, elles se présentent toutes évidemment sous la forme de $\frac{0}{0}$. Or, on peut poser $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=r$ et $\frac{a''}{a}=\frac{b''}{b}=\frac{c''}{c}=r'$, et si l'on remplace, dans les équations (2) et (3), a', b' et c', a'', b'' et c'', par leurs valeurs en r et r', on aura :

$$(1) \qquad (ax+by+cz)=d$$
$$(2) \qquad r\,(ax+by+cz)=d'$$
$$(3) \qquad r'\,(ax+by+cz)=d''$$

pour le système proposé, et l'on voit que généralement ces trois équations sont soit incompatibles toutes trois ensemble, soit deux à deux, d'une manière quelconque. Toutefois, si l'on avait $rd=d'$, la première et la deuxième seraient identiques; la première serait identique avec (3), si l'on avait $dr'=d''$, et enfin elles seraient toutes trois identiques ensemble si l'on avait $d=\frac{d'}{r}=\frac{d''}{r'}$. Ainsi, dans ce cas, les trois équations seront incompatibles entre elles ou se réduiront à deux équations incompatibles, ou enfin elles se réduiront à une équation unique entre trois inconnues, les deux autres étant une conséquence de celle-ci; elles représentent trois plans parallèles, et il peut arriver que deux de ces plans, ou même que tous trois se réduisent à un seul.

13. En résumé, un système de trois équations du premier degré entre trois inconnues, offrira nécessairement l'une des combinaisons suivantes :

1° Ces trois équations seront compatibles et distinctes lorsque les valeurs générales des inconnues seront finies et déterminées; les valeurs des auxiliaires m, n et p étant toutes différentes de zéro, ou une seule étant nulle dans un seul des systèmes accessoires.

2° Les trois équations seront incompatibles toutes trois ensemble, mais compatibles deux à deux, et formeront par conséquent *trois systèmes* distincts de deux équations compatibles et indéterminées lorsque les valeurs générales des inconnues seront infinies, les auxiliaires étant toutes différentes de zéro; ou bien encore lorsque l'une des valeurs générales des inconnues étant indéterminée, et les autres infinies, les valeurs des auxiliaires seront nulles toutes trois ensemble dans un même système accessoire, et différentes de zéro dans tous les autres.

3° Une des trois équations sera incompatible avec une des deux autres, mais ces deux-ci (celles qui sont incompatibles entre elles) seront compatibles chacune avec la troisième, et partant le système proposé se réduira à *deux systèmes* compatibles et indéterminés lorsque les valeurs générales des inconnues seront toutes infinies, et qu'en même temps la valeur d'une des auxiliaires sera nulle dans les trois systèmes accessoires, les autres étant toutes différentes de zéro, ou encore deux de celles-ci étant nulles dans un deuxième système accessoire.

4° Une des trois équations sera conséquence des deux autres, et partant le système proposé se réduira à *un seul système* de deux équations compatibles et indéterminées, lorsque les valeurs générales des inconnues seront toutes trois indéterminées, que les valeurs des auxiliaires soient toutes différentes de zéro, ou bien que seulement quelques-unes d'entre elles ne soient pas nulles.

5° Enfin les équations seront toutes trois incompatibles deux à deux, ou bien conséquence l'une de l'autre, et formeront par conséquent trois systèmes distincts d'une seule équation à trois inconnues, lesquels pourront se réduire à deux, ou même à un seul, lorsque les valeurs générales des inconnues seront toutes trois indéterminées, et qu'en même temps les valeurs des auxiliaires seront nulles toutes à la fois dans les trois systèmes accessoires.