NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MENTION

Solution de la question 97

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 398-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__398_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 97. (*V*. t. IV, p. 260.)

PAR M. MENTION.

Couper un triangle par une transversale, de manière que trois segments non consécutifs soient égaux. (PROUHET).

Solution. *Ajoutant au rayon du cercle circonscrit la distance du centre de ce cercle au centre du cercle inscrit, on aura la valeur du segment triple. On en obtient encore une valeur en retranchant cette distance du même rayon.*

Démonstration. Le théorème de Ptolémée donne immédiatement l'équation (x étant la valeur de ce segment).

$$2px^2 - x(ab + ac + bc) + abc = 0,$$

dans laquelle $2p$ est le périmètre du triangle dont a, b, c sont les côtés.

Or $\quad ab+ac+bc=2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)=$

$$=\frac{2S(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{2S.4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin A\sin B\sin C}=$$

$$=\frac{S}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

(S représente la surface du triangle), $abc=4p\mathrm{R}r$.

Substituant ces valeurs, l'equation devient :

$$2x^2-x\frac{r}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+4\mathrm{R}r=0.$$

$$x^2-2\mathrm{R}x+2\mathrm{R}r=0.$$

D'où enfin $\qquad x=\mathrm{R}\pm\sqrt{\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}r}.$