

TERQUEM

Note sur les expressions $\frac{0}{0}, 0^0$

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 391-394

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__391_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES EXPRESSIONS $\frac{0}{0}$, 0^0 (voir t. V, p. 259
et t. VI, p. 109).

—

I. Tout calcul commence par des opérations sur des *données*, et le calculateur qui fait emploi de ces données, y attache nécessairement un sens déterminé, fixe. Il n'en est pas ainsi de certains *résultats* de calcul, qui représentent des opérations apparentes dont on ne peut connaître et fixer le sens, qu'autant qu'on sache d'où les *résultats* proviennent. Ainsi *zéro* n'est jamais une *donnée* sur laquelle on opère en entrant dans un calcul; mais très-souvent le calcul se termine par des opérations à faire sur le zéro, par exemple une division $\frac{0}{0}$, ou une élévation de puissance 0^0 ; dans ces cas, le résultat n'a un sens déterminé que lorsqu'on sait d'où les zéros proviennent. Éclaircissons ceci par des exemples.

$z = \frac{y}{x}$ est l'équation du paraboløide hyperbolique. Si on fait simultanément $x = 0$, $y = 0$, z devient $\frac{0}{0}$, et cette

expression signifie dans ce cas que z a une valeur quelconque, c'est-à-dire que l'axe des z fait partie de la surface. Menons dans le plan xy la bissectrice $y = x$; par cette bissectrice et l'axe des z concevons un plan qui coupe la surface suivant une ligne dont l'équation prise dans ce plan est $z = \frac{x}{x} = 1$, la section est donc une droite parallèle à la bissectrice; si maintenant on fait $x = 0$, z a encore la forme $\frac{0}{0}$; mais cette fois cette expression, d'après sa provenance, désigne l'unité; c'est-à-dire la parallèle coupe l'axe des z à une distance 1 de l'origine. Généralement soit $z = \frac{f(y)}{F(x)}$ l'équation d'une surface; si l'on a simultanément $f(b) = 0$; $F(a) = 0$; alors $z = \frac{0}{0}$; la droite parallèle à l'axe des z , passant par le point $x = a$, $y = b$, du plan xy , est située sur la surface; menons par l'axe des z le plan $y = x$, il coupe la surface suivant une ligne ayant pour équation $z = \frac{f(x)}{F(x)}$; si l'on a simultanément $f(a) = F(a) = 0$, $z = \frac{0}{0}$; et cette valeur désigne les coordonnées des points où la parallèle à l'axe des z , passant par le point $x = a$, $y = a$, rencontre la section.

Soit l'équation de la surface exponentielle $z = f(x)^{F(y)}$; supposons que l'on ait $f(a) = F(b) = 0$; $x = 0^0$ signifie que z est indéterminée, ou bien comme ci-dessus que la parallèle à l'axe des z , passant par le point $x = a$, $y = b$, appartient à la surface.

Faisons $y = x$; alors $z = f(x)^{F(x)}$ est l'équation de la section faite par le plan $y = x$; si $f(a) = F(a) = 0$, $z = 0^0$ désigne les coordonnées des points où la parallèle rencontre la section; prenons en particulier l'équation

$$z = \left(\frac{-1}{p^x} \right)^y .$$

Faisons $x=y=0$; $z=0^0$, expression de provenance indéterminée; faisons $y=x$, l'équation de la section est

$z = \left(p \frac{-x}{x} \right)^x = p^{-x}$; donc, dans ce cas, faisant $x=0$, $z=0^0$ a pour valeur p^{-1} .

Soit encore l'équation exponentielle $z = x^y$; faisant $x=y=0$, $z=0^0$ expression indéterminée; mais si dans la section $z=x^x$ on fait $u=0$, alors $z=0^0=1$; c'est l'objet de la démonstration suivante due au célèbre Pfaff, et rapportée par son savant disciple Mœbius (Crelle, XII, 134).

II. LEMME 1. On a toujours $(1+z)^m > 1+(m-1)z$, pour z positif et $m > 1$.

LEMME 2. m étant > 4 , on a $2^m > m^2$.

Nous nous contentons d'énoncer ces lemmes.

Soit $y=x^x$, faisons $x = \frac{1}{n}$; $y = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$ il faut démontrer

que n croissant indéfiniment, $n^{\frac{1}{n}}$ s'approche de l'unité;

comme $n > 1$, on a évidemment $n^{\frac{1}{n}} > 1$; faisons donc

$n^{\frac{1}{n}} = 1+z$; $n = (1+z)^n > 1+(n-1)z$, en vertu du lemme 1;

d'où $n-1 > (n-1)z$; $1 > z$; $n^{\frac{1}{n}} < 2$; ainsi $n^{\frac{1}{n}}$ est toujours compris entre 1 et 2, lorsque $n > 1$.

Faisons $n = 2^m n'$ où n' est un nombre constant fini, et m

pouvant croître indéfiniment; $n^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{m}{2^m n'}} \cdot n'^{\frac{1}{2^m n'}}$; or, puis-

que m dépasse 4, on a $2^m > m^2$, donc $\frac{2^m n'}{m} > mn'$; et par

conséquent $\frac{m}{2^m n'} < \frac{1}{mn'}$; donc $2^{\frac{m}{2^m n'}} < 2^{\frac{1}{mn'}}$; $n^{\frac{1}{n}} < 2$; donc

$n^{\frac{1}{2^{mn'}}} < 2^{\frac{1}{2^m}} < 2^{\frac{1}{m}}$; donc $n^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{mn'}} \cdot 2^{\frac{1}{m}} = 2^{\left(1 + \frac{1}{n'}\right)\frac{1}{m}} = p^{\frac{1}{m}}$,
et p est une quantité constante finie > 1 ; donc en croissant
 $n^{\frac{1}{n}}$ s'approche indéfiniment de l'unité. C. Q. F. D.
