

E. BRASSINE

**Usage de la méthode des multiplicateurs indéterminés, pour la démonstration de quelques propositions de géométrie analytique. Remarque sur la méthode à employer pour démontrer les principaux théorèmes relatifs aux diamètres conjugués**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6 (1847), p. 381-387

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_\\_381\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__381_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## USAGE

*De la méthode des multiplicateurs indéterminés, pour la démonstration de quelques propositions de géométrie analytique. — Remarque sur la méthode à employer pour démontrer les principaux théorèmes relatifs aux diamètres conjugués.*

**PAR M. E. BRASSINE,**  
Professeur aux écoles d'artillerie.

---

1<sup>o</sup> La méthode des multiplicateurs indéterminés, dont on donne en algèbre un exemple pour la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues, et qui est d'une si grande importance dans la mécanique, peut aussi servir à la démonstration très-simple de plusieurs proposi-

tions de géométrie analytique, comme nous allons le faire voir par les exemples suivants.

(\*) *Théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une conique.* Supposons un quadrilatère inscrit dans une conique, dont les côtés opposés ayant pour équation  $y = ax + b$ ,  $y = a'x + b'$  et  $y = \alpha x + \beta$ ,  $y = \alpha'x + \beta'$ , l'équation de la courbe passant par les quatre sommets du quadrilatère sera évidemment :

$$(y - ax - b)(y - a'x - b') + \lambda(y - \alpha x - \beta)(y - \alpha'x - \beta') = 0. \quad (1)$$

(Cette équation renferme un coefficient indéterminé  $\lambda$ , qui permettrait de faire passer la courbe par un cinquième point, ce qui prouve que la forme précédente est la plus générale possible). Sur le côté  $y = a'x + b'$  construisons un second quadrilatère inscrit dans la même conique et désignons les équations de ses côtés opposés par

$$y = a''x + b'', \quad y = a''x + b'' \text{ et } y = mx + n, \quad y = m'x + n'.$$

L'équation de la courbe pourra encore prendre la forme :

$$(y - a'x - b')(y - a''x - b'') + \mu(y - mx - n)(y - m'x - n') = 0, \quad (2)$$

et par une détermination convenable de  $\lambda$  et  $\mu$  et après avoir respectivement divisé les équations (1), (2) par  $1 + \lambda$  et  $1 + \mu$ , ces équations devront devenir identiques terme à terme, puisqu'elles représentent alors la mesure courbe; cela posé, en faisant abstraction de la droite  $y = a'x + b'$ , commune aux deux quadrilatères, les six autres droites forment un hexagone dont les côtés, opposés deux à deux, sont :

$$y - ax - b = 0, \quad y - a''x - b'' = 0, \quad y - \alpha x - \beta = 0, \quad y - m'x - n' = 0, \\ y - \alpha'x - \beta' = 0, \quad y - mx - n = 0.$$

Or, les équations (1), (2), préalablement multipliées par  $\frac{1}{1 + \lambda}$  et  $\frac{1}{1 + \mu}$  devant rester identiques quel que soit  $x$ , si

(\*) Voir t. III, p. 304; t. VI, p. 269.

on appelle  $X_2, Y_2, X_3, Y_3$  les coordonnées communes aux côtés opposés des deux derniers systèmes ci-dessus, on aura identiquement, d'après les équations (1) (2), les relations :

$$\frac{1}{1+\lambda}(Y_2 - aX_2 - b) = \frac{1}{1+\mu}(Y_2 - a''X_2 - b'')$$

et

$$\frac{1}{1+\lambda}(Y_3 - aX_3 - b) = \frac{1}{1+\mu}(Y_3 - a''X_3 - b'').$$

Comme d'ailleurs la relation générale

$$\frac{1}{1+\lambda}(y - ax - b) = \frac{1}{1+\mu}(y - a''x - b'')$$

est évidemment satisfaite par les coordonnées  $X, Y$ , communes aux deux côtés opposés  $y = ax + b, y = a''x + b''$ , il résulte que les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone, dont les coordonnées sont  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ , sont situées sur la droite dont l'équation est

$$\frac{1}{1+\lambda}(y - ax - b) = \frac{1}{1+\mu}(y - a''x - b'').$$

Remarquons que si deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit deviennent des tangentes, les deux autres côtés se confondront avec la droite qui passe par les points de contact, et l'équation (1) de la conique prendra cette forme simple  $(y - ax - b)(y - a''x - b'') + \lambda(y - ax - \beta)^2 = 0$ , qui peut être souvent utile.

2° Imaginons inscrits dans la section conique deux quadrilatères qui n'aient pas, comme précédemment, le côté  $y - a''x - b'' = 0$  commun; mais supposons ce côté commun remplacé par deux côtés distincts  $y - a'x - b' = 0, y - hx - k = 0$ , les équations (1), (2) de la conique seront remplacées par les suivantes :

$$(y - ax - b)(y - a'x - b') + \lambda(y - ax - \beta)(y - a'x - \beta') = 0, (3)$$

$$(y - hx - k)(y - a''x - b'') + \mu(y - mx - n)(y - m'x - n') = 0, (4)$$

qui seront identiques pour des déterminations convenables de  $\lambda$  et de  $\mu$ . Cela posé, considérons l'équation de la conique

$$\frac{1}{1+\lambda}(y-ax-b)(y-a'x-b') = \frac{1}{1+\mu}(y-hx-k)(y-a''x-b''), \quad (5)$$

laquelle passera par les quatre points d'intersection des droites dont les équations sont au premier membre avec celles dont les équations sont au second membre, mais d'après l'identité des équations (3), (4), les coordonnées qui annulent simultanément les deux produits

$$(y-mx-n)(y-m'x-n'), (y-\alpha x-\beta)(y-\alpha'x-\beta'),$$

rendent identique l'équation (5), ce qui fait que huit points d'intersection se trouvent sur la conique (5). Mais les intersections des côtés  $y-a'x-b'=0$ ,  $y-hx-k=0$  avec la courbe, peuvent être réunies par autant de cordes que l'on voudra; d'où résulte ce théorème général : *Si un polygone d'un nombre quelconque de côtés (supérieur à sept) est inscrit dans une conique, et si l'on prend deux systèmes distincts de quatre sommets consécutifs, et qu'on termine par deux diagonales les deux quadrilatères que forment quatre sommets, ces deux diagonales, avec leurs côtés opposés dans les quadrilatères se rencontrent en quatre points; les quatre autres côtés se rencontrent aussi en quatre points, et les huit points ainsi déterminés se trouvent sur la même conique (\*)*.

On pourrait, en employant pour les degrés supérieurs au second, des équations de formes particulières, arriver à des théorèmes analogues aux précédents.

3° Ramenons encore aux principes précédents un théorème bien connu. Supposons que par un point quelconque  $o$ , situé dans le plan d'une conique ou même deux sécantes telles que la première coupe la courbe en deux points  $m', m''$ , et la seconde en deux points  $n', n''$ , on pourra former un

---

(\*) Voir p. 356; le théorème de M. Paul Serret est antérieur au présent travail. Tm.

quadrilatère  $m'm''n'n''$ , et en faisant varier de position les sécantes qui passent toujours en  $o$ , le lieu des intersections des côtés opposés  $m'n'$ ,  $m''n''$  du quadrilatère, sera une droite. En effet, prenons le point  $o$  pour origine des coordonnées et désignons par  $y-kx=0$ ,  $y-k'x=0$  les équations de deux sécantes fixes, et par  $y-ax-\beta=0$ ,  $y-a'x-\beta'=0$ , celles des deux autres côtés opposés du quadrilatère formé par les sécantes ; l'équation de la conique sera :

$$\frac{1}{1+\lambda}[(y-kx)(y-k'x)+\lambda(y-ax-\beta)(y-a'x-\beta')]=0. \quad (6)$$

Pour de nouvelles sécantes de position quelconque, l'équation de la sécante sera :

$$\frac{1}{1+\mu}[(y-hx)(y-h'x)+\mu(y-ax-b)(y-a'x-b')]=0, \quad (7)$$

et l'équation (7) devra rester identique à (6), bien que  $h, h', a, b, a', b'$ , varient sans cesse ; en identifiant dans les équations (6), (7) les termes du premier degré et faisant  $\frac{\mu}{1+\mu}=\Delta$ , on aura :

$$\Delta(ab'+ba')=C, \quad \Delta(bb')=C', \quad \Delta(b+b')=C'. \quad (8)$$

$C, C', C''$  étant des constantes égales aux coefficients invariables et déterminés des termes du premier degré de l'équation (6) ; mais les coordonnées des points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère sont données par des équations  $y=ax+b$ ,  $y=a'x+b'$  ; prenant  $a, a'$  dans ces deux dernières, les portant dans la première du groupe (8) et tenant compte des deux dernières de ce groupe, on trouve très-simplement  $\frac{C'y}{x} - \frac{C'}{x} = C$ , équation du lieu cherché.

4° Nous ne multiplierons pas davantage les exemples de la méthode précédente, qu'on peut employer souvent avec succès pour la détermination de droites, de plans, de courbes, assujettis à des conditions particulières.

Si par exemple on voulait faire passer un plan par une droite dont les projections auraient pour équations  $P=0$ ,  $P'=0$ , et par un point; on poserait d'abord  $P+\lambda P'=0$  pour l'équation du plan, et  $\lambda$  serait déterminé par la condition que le plan contient le point donné.

Au sujet de cette méthode élémentaire, je remarquerai que les questions sur les diamètres conjugués, dont j'ai inséré les énoncés dans ce recueil, se démontrent très-simplement, en faisant usage des valeurs des coordonnées des extrémités de ces diamètres. Si, par exemple,  $x', y'$  sont les coordonnées de l'extrémité de l'un des diamètres conjugués,

$$y'' = \frac{b}{a}x', \quad x'' = -\frac{a}{b}y'$$

seront les coordonnées des extrémités du second diamètre. Ces valeurs très-simples fournissent la démonstration immédiate d'un grand nombre de propositions nouvelles et de presque tous les théorèmes connus, comme je l'ai fait voir dans le *Journal de mathématiques*, tome VII, 1842. Les auteurs qui depuis ont suivi cette méthode dans leurs traités de géométrie analytique, auraient pu ajouter, comme je l'avais fait, sans sortir du cadre des éléments, que la somme ou la différence des puissances semblables de la plupart des lignes conjuguées, est constante; ce qui donne de l'extension aux théorèmes d'Apollonius. Ainsi, dans l'ellipse, *la somme des carrés des normales ou des sous-normales conjuguées est constante*. Une de ces deux propositions renferme comme cas particulier, l'invariabilité de la sous-normale dans la parabole, parce que, lorsque le grand axe de l'ellipse est infini, une des deux sous-normales devient nulle.

*Note.* La méthode des *multiplicateurs*, mise en usage par Bobilier, est aujourd'hui cultivée avec grand succès en Allemagne et en Angleterre et n'a pas encore trouvé accès dans nos éléments, et avec raison. A quoi cela sert-il? à enrichir la science et en même temps à en faciliter l'accès; mais n'é-

tant pas exigé dans les examens, cela ne sert par conséquent à rien du tout. Il est toutefois à regretter que dans un ouvrage philosophique récemment publié, sur la *correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, on se soit contenté de traiter des questions depuis longtemps débattues et rebattues, et qu'on ne dise pas un mot des *méthodes*, par exemple, des *multiplicateurs*, des procédés métamorphiques, des principes de translation, des symbolismes, des homogènes, etc., qui ont triplé nos connaissances géométriques. Existe-t-il quelque chose de plus philosophique dans la science, que les *méthodes*? Et où la liaison entre les deux instruments que l'intelligence applique à la *quantité* est-elle plus manifeste que dans ces méthodes? Peut-être aussi que le savant auteur de tant d'écrits utiles s'est réservé de traiter ces matières dans un ouvrage spécial, qui sera accueilli avec faveur par ceux qui attachent de l'intérêt à l'histoire des progrès de l'esprit humain dans toutes les directions. Ce serait un magnifique travail, de reprendre en sous-œuvre les *Essais* de l'illustre Condorcet, de les rectifier et de les compléter.