

HAILLECOURT

**Sur les branches infinies des courbes  
algébriques**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6  
(1847), p. 372-374

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_372\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_372_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES BRANCHES INFINIES DES COURBES ALGÈBRIQUES (\*).

PAR M. HAILLECOURT,

ancien élève de l'École normale.

—

On sait que

1° Le coefficient angulaire de tout rayon vecteur infini mené par l'origine, doit être racine de l'équation  $F(c)=0$ , obtenue en remplaçant  $x$  par 1,  $y$  par  $c$  dans les termes du plus haut degré de l'équation de la courbe en la mettant sous la forme

$$0 = f(x, y) = x^m F(c) + x^{m-1} \varphi(c) + x^{m-2} \psi(c).$$

2° Si à une racine  $\gamma$  de l'équation  $F(c)=0$  correspond une branche infinie hyperbolique et parabolique, sa tangente à l'infini a pour coefficient angulaire cette même racine.

3° Si  $y=b$  est asymptote à une branche infinie,  $x^m$  manque dans l'équation et la plus haute puissance  $x^k$  est multipliée par une fonction de  $y$  s'annulant pour  $y=b$  et par suite de la forme  $(y-b)^q \pi(y)$ , c'est-à-dire que l'équation a la forme

$$0 = f(x, y) = x^k (y-b)^q \pi(y) + x^{k-1} \dots$$

Il s'agit de démontrer les trois théorèmes suivants, dont le troisième est évidemment une conséquence des deux autres :

**THÉORÈME I.** *Le nombre total de branches infinies parallèle*

---

(\*) Voir page 217.

à une même direction est pair pour toute courbe représentée par une équation entière et rationnelle.

**THÉORÈME II.** Les branches hyperboliques sont en nombre pair.

**THÉORÈME III.** Les branches paraboliques sont en nombre pair.

I. Soit prise pour axe des  $x$  la direction du rayon vecteur infini,  $F(c) = 0$  a une racine nulle et est de la forme  $c^q \pi(c)$ , on a donc :

$$0 = f(x, y) = x^m c^q \pi(c) + x^{m-1} \dots$$

On peut toujours supposer  $q$  impair : en effet, si  $q$  était pair, on pourrait multiplier toute l'équation par  $y$ , ou son égal  $cx$ , d'où

$$0 = yf(x, y) = x^{m+1} c^{q+1} \pi(c) + x^m \dots$$

et comme l'axe de  $x$ , ainsi introduit dans le lieu géométrique, représente deux branches infinies, il est clair que la démonstration n'est pas altérée.

Soit donc  $q$  impair. Si, donnant à  $c$  des valeurs déterminées  $-h$ ,  $+h$ , aussi petites qu'on veut, on fait croître  $x$  à partir d'une valeur finie, les deux premiers termes  $x^m h^q \pi(h)$ ,  $-x^m h^q \pi(-h)$  donnent leurs signes aux développements correspondants. On voit ainsi qu'il y a un nombre impair de branches infinies entre les deux concourantes  $y = -h$ ,  $y = +h$ , et comme ce qu'on dit pour  $x$  positif peut se répéter pour  $x$  négatif, le théorème I est démontré.

II. Soit maintenant pris pour axe des  $x$  une asymptote.

L'équation est de la forme

$$0 = f(x, y) = x^k y^q \pi(y) + \dots$$

On peut toujours, comme plus haut, supposer  $q$  impair, et de la même manière on démontrera que tant au-dessus qu'au-dessous de l'axe des  $x$  il y a un nombre impair de branches infinies comprises entre deux parallèles  $x = -h$ ,  $x = +h$  :

par conséquent un nombre pair de branches ayant une asymptote commune.

Donc le nombre de branches ayant leur asymptote parallèle est pair, ce qui démontre le théorème II.

*Remarque.* Il a été démontré que toute asymptote rectiligne est asymptote à au moins deux branches.

On voit de plus que si les deux nombres de branches infinies, ayant l'une un sens et l'autre le sens contraire, ne sont pas égaux, la différence est un nombre pair.

*Scholie générale sur les branches infinies des courbes.*

Elle se résume en cette proposition, qui n'a besoin d'aucune démonstration spéciale :

Soit  $F(t, u) = 0$  l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées  $t, u$ , assujettie seulement à la condition que le point déterminé par  $t, u$  passe à l'infini dès qu'une au moins des coordonnées prend elle-même une valeur infinie. — Si la courbe donnée par l'équation en coordonnées rectilignes  $F(x, y) = 0$  a une branche infinie qui ait pour asymptote la droite  $y = cx + d$ , la courbe  $F(t, u) = 0$  a une branche infinie qui a pour asymptote la ligne  $u = ct + d$ .

Si  $t = \omega$ ,  $u = \rho$ , on a le système polaire ordinaire, et à chaque asymptote rectiligne  $y = cx + d$  correspond la spirale asymptotique  $\rho = c\omega + d$ .