

DE PERRODIL

Solution de la question 149

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 367-368

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__367_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 149.

PAR M. DE FERRODIL,

élève du collège de la Flèche.

(1) $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, étant l'équation de la courbe ; α, β les coordonnées du point de concours des quatre normales, les quatre points donnés sont situés sur la courbe

$$(2) \quad c^2xy - a^2\alpha y + b^2\beta x = 0.$$

Éliminons y entre (1) et (2).

$$(A) \quad c^4x^4 - 2a^2c^2\alpha x^3 + a^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)x^2 + 2a^4c^2\alpha x - a^6\alpha^2 = 0.$$

Soit (3) $(y-q)^2 + (x-p)^2 = r^2$, le cercle qui passe par trois points quelconque des points donnés. Éliminons y entre (1) et (3).

$$(B) \quad c^4x^4 - 4a^2c^2px^3 + 2a^2(2x^2p^2 + 2b^2q^2 + R^2c^4)x^2 - 4a^4R^2px + a^4R^4 - 4a^4b^2q^2 = 0.$$

Dans cette dernière équation

$$R^2 = p^2 + q^2 + b^2 - r^2.$$

Il reste à démontrer que pour des valeurs convenables de p, q et R , les équations (A) et (B) ont les mêmes racines au signe près de l'une d'elles. Supposons donc que p, q, R soient des valeurs réellement capables de remplir ces conditions. Ajoutons (A) et (B), les derniers termes se détruiront, et l'on pourra diviser par x .

$$(C) \quad 2c^4x^3 - 2a^2c^2(2p+\alpha)x^2 + a^2 \left\{ \begin{array}{l} 4a^2p^2 + 4b^2q^2 + 2c^2R^2 \\ + a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4 \end{array} \right\} x + 2a^4(c^2\alpha - 2R^2p) = 0.$$

Retranchons (B) de (A), nous aurons une équation qui devra être identique avec la précédente.

$$(D) \quad 2c^2 (2p - \alpha) x^3 + \left\{ \begin{array}{l} a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^4 \\ -4a^2 p^2 - 4b^2 q^2 - 2c^2 R^2 \end{array} \right\} x^2 + \\ + 2a^2 (c^2 \alpha + 2R^2 p) x - a^2 (R^4 - 4b^2 q^2 + a^2 \alpha^2) = 0.$$

Les équations de condition d'identité seront, en y joignant celle qui indique que les derniers termes de A et de B sont de signes contraires :

$$(1) \quad 4a^2 p^2 + 4b^2 q^2 + 2c^2 R^2 - (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^4) = 2a^2 (4p^2 - \alpha^2),$$

$$(2) \quad 4a^2 p^2 + 4b^2 q^2 + 2c^2 R^2 + (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^4) = \frac{2c^2 (c^2 \alpha + 2R^2 p)}{2p - \alpha}.$$

$$(3) \quad \dots \dots 2a^2 (2R^2 p - c^2 \alpha) (2p - \alpha) = c^2 (R^4 - 4b^2 q^2 + a^2 \alpha^2).$$

$$(4) \quad \dots \dots \dots R^4 = 4b^2 q^2 + a^2 \alpha^2.$$

Je dis qu'effectivement (1) est conséquence des trois autres.

Substituant R^4 tirée de (4) dans le second membre de l'équation (3), et réduisant, il vient : $R^2 (2p - \alpha) = c^2 \alpha$.

Substituant dans le second membre de l'équation (2), il devient :

$$[2c^2 + 2(R^2 + c^2)] \frac{c^2 \alpha}{2p - \alpha} \quad \text{ou} \quad R^2 (2c^2 + 2R^2 + 2c^2).$$

Par conséquent l'équation (2) devient, en remplaçant R^4 :

$$2a^2 \alpha^2 + 2 \cdot 4b^2 q^2 + 2R^2 c^2 = 4a^2 p^2 + 4b^2 q^2 + (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^4);$$

ou bien, ajoutant $4a^2 p^2$ aux deux membres,

$$4a^2 p^2 + 4b^2 q^2 + 2c^2 R^2 - (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^4) = 2a^2 (4p^2 - \alpha^2).$$

Résultat parfaitement identique avec (1).