NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE PERRODIL

Solution de la question 149

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 367-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__367_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 149.

PAR M. DE PERRODIL,
élève du collége de la Flèche.

---

(1) $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, étant l'équation de la courbe; α, β les coordonnées du point de concours des quatre normales, les quatre points donnés sont situés sur la courbe

$$(2) \qquad c^2xy-a^2\alpha y+b^2\beta x=0.$$

Éliminons y entre (1) et (2).

$$(\text{A}) \quad c^4x^4-2a^2c^2\alpha x^3+a^2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)x^2+2a^4c^2\alpha x-a^6\alpha^2=0.$$

Soit (3) $(y-q)^2+(x-p)^2=r^2$, le cercle qui passe par trois points quelconque des points donnés. Éliminons y entre (1) et (3).

$$(\text{B}) \quad c^4x^4-4a^2c^2px^3+2a^2(2a^2p^2+2b^2q^2+\text{R}^2c^2)x^2-4a^4\text{R}^2px+$$
$$+a^4\text{R}^4-4a^4b^2q^2=0.$$

Dans cette dernière équation

$$\text{R}^2=p^2+q^2+b^2-r^2.$$

Il reste à démontrer que pour des valeurs convenables de p, q et R, les équations (A) et (B) ont les mêmes racines au signe près de l'une d'elles. Supposons donc que p, q, R soient des valeurs réellement capables de remplir ces conditions. Ajoutons (A) et (B), les derniers termes se détruiront, et l'on pourra diviser par x.

$$(\text{C}) \quad 2c^4x^3-2a^2c^2(2p+\alpha)x^2+a^2\left\{\begin{matrix}4a^2p^2+4b^2q^2+2c^2\text{R}^2\\+a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4\end{matrix}\right\}x+$$
$$+2a^4(c^2\alpha-2\text{R}^2p)=0.$$

Retranchons (B) de (A), nous aurons une équation qui devra être identique avec la précédente.

$$\text{(D)} \quad 2c^2(2p-\alpha)x^3 + \left\{ \begin{array}{c} a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4 \\ -4a^2p^2 - 4b^2q^2 - 2c^2\mathrm{R}^2 \end{array} \right\} x^2 +$$
$$+ 2a^2(c^2\alpha + 2\mathrm{R}^2p)x - a^2(\mathrm{R}^4 - 4b^2q^2 + a^2\alpha^2) = 0.$$

Les équations de condition d'identité seront, en y joignant celle qui indique que les derniers termes de A et de B sont de signes contraires :

$$(1) \quad 4a^2p^2 + 4b^2q^2 + 2c^2\mathrm{R}^2 - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4) = 2a^2(4p^2 - \alpha^2),$$
$$(2) \quad 4a^2p^2 + 4b^2q^2 + 2c^2\mathrm{R}^2 + (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4) = \frac{2c^2(c^2\alpha + 2\mathrm{R}^2p)}{2p-\alpha}.$$
$$(3) \quad \ldots\ldots \quad 2a^2(2\mathrm{R}^2p - c^2\alpha)(2p-\alpha) = c^2(\mathrm{R}^4 - 4b^2q^2 + a^2\alpha^2).$$
$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{R}^4 = 4b^2q^2 + a^2\alpha^2.$$

Je dis qu'effectivement (1) est conséquence des trois autres.

Substituant R^4 tirée de (4) dans le second membre de l'équation (3), et réduisant, il vient : $\mathrm{R}^2(2p-\alpha) = c^2\alpha$.

Substituant dans le second membre de l'équation (2), il devient :

$$[2c^2 + 2(\mathrm{R}^2 + c^2)]\frac{c^2\alpha}{2p-\alpha} \quad \text{ou} \quad \mathrm{R}^2(2c^2 + 2\mathrm{R}^2 + 2c^2).$$

Par conséquent l'équation (2) devient, en remplaçant R^4 :

$$2a^2\alpha^2 + 2.4b^2q^2 + 2\mathrm{R}^2c^2 = 4a^2p^2 + 4b^2q^2 + (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4);$$

ou bien, ajoutant $4a^2p^2$ aux deux membres,

$$4a^2p^2 + 4b^2q^2 + 2c^2\mathrm{R}^2 - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4) = 2a^2(4p^2 - \alpha^2).$$

Résultat parfaitement identique avec (1).