

ESTIENNE DE LA ROCHE

**Note historique sur la notation
cartésienne des exposants**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 35-46

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_35_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE HISTORIQUE

Sur la notation cartésienne des exposants.

ESTIENNE DE LA ROCHE.

Tous les géomètres reconnaissent que cette notation a fait faire d'immenses progrès à l'analyse. Descartes est le premier qui ait mis cette notation en usage, et l'autorité de ce grand nom servit à la répandre. Toutefois, un célèbre géomètre (*), connu par d'importants travaux sur la science et sur son histoire, a fait l'observation curieuse qu'on trouvait cette notation dans un ouvrage publié dans le seizième siècle; nous allons consacrer quelques lignes à cet ouvrage, très-rare, et dont nous devons la communication à l'amitié de M. le professeur Vincent.

Voici le titre *in extenso* :

L'arismetique (note 1) et géometrie de maistre Estienne de la Roche (note 2) dict Ville Franche, nouvellement imprimée et des faultes corrigée, « à laquelle sont ajoutées les tables

(*) M. Chasles vient d'être nommé professeur de géométrie supérieure, à la Sorbonne, chaire nouvellement établie. Cette création et cette nomination font époque et peuvent exercer une grande influence sur l'enseignement si arriéré, si incomplet, de la géométrie de collège.

» de divers comptes , avec leurs canons , calculées par Gilles
» Huguetan natif de Lyon , par lesquelles on pourra facile-
» ment trouver les comptes tous faitz , tant des achatz que
» ventes de toutes marchandises. Et principalement des
» marchandises qui se vendent , ou achètent à la mesure ,
» cōme a l'aulne , a la canne , a la toyse , a la palme , au
» pied , et autres semblables. Au poix , cōme a la livre , au
» quintal , au millier , a la charge , au marc , et a l'once , a
» la piece , a nôbre , a la douzaine , a la grosse , au cent et
» au millier. Avec deux tables servantz aux libraires ven-
» deurs et acheteurs de papier. Ensemble une table de des-
» pence , a scavoir a tant pour jour , combien on depēd lan et
» le moys , et a tant le moys , combien revient lan et le jour ,
» et a tant par an , cōbien on despend tous les moys , et a
» combien revient pour chascun jour. Davantage , les
» tables du fin dor et dargent , pour scavoir (scelon que le
» marc de billon tiendra de loy , ou de fin) , combien il
» vaudra de poix de fin or , ou dargent fin. »

On les vend a Lyon a lenseigne de la Sphaere , cheulx Gilles , et Jacques Huguetan freres. 1538 , in-fol.

On n'a numéroté que le recto , et l'arithmétique contient 151 de ces feuilles , ce qui fait 302 de nos pages. Les tables de Huguetan jointes à l'arithmétique de De la Roche , ne portent aucune pagination.

On voit que c'est une réimpression. La première édition est de 1520.

L'arithmétique est divisée en deux parties : la première est théorique , et la seconde est pratique ; la première est divisée en six différences (note 3) , contenant chacune deux chapitres ; les quatre premières différences traitent des nombres parfaits , abondants , défailants , des proportions et rapports , et enfin de quatre opérations pour entiers et pour les *routs* , expression qui équivaut à nombre *rompu* ou fractionnaire ;

le tout suivant la méthode de Boëce (note 3), qui a servi si longtemps de type ; car , tout ouvrage remarquable devient la source d'une foule d'imitations : c'est ainsi que nous voyons aujourd'hui toute géométrie être calquée sur celle de Legendre , toute statique sur celle de M. Poinsoit , tout calcul infinitésimal sur celui de M. Cauchy , etc. Dans la *différence* des proportions (fol. 3), on trouve *cent vingt-quatre* noms donnés à autant de rapports géométriques pour les distinguer ; ainsi le rapport de 5 : 29 est inscrit sous cette rubrique : *submultiplex superpatiens-subquintuple-superquadriperciensquintes* , parce que $29 = 5 \cdot 5 + \frac{4}{5} \cdot 5$.

C'est le système musical des Grecs qui a amené cette profusion de termes hétéroclites ; car les Grecs ne cultivaient l'arithmétique que pour les besoins de ce système , et nullement pour ceux du commerce , profession décriée , qui était regardée comme indigne d'un homme comme il faut (ingenuus). Ce préjugé antisocial a considérablement retardé la théorie des nombres , chez ce peuple d'un génie si inventif. C'est au commerce que nous devons la connaissance de l'arithmétique chiffrée des Indiens et des immenses progrès , conséquences immédiates de cette connaissance ; remarquons derechef , en passant , que les traités modernes renferment encore une grande superfétation en fait de proportions et de rapports , reste de l'ancien état de choses.

Nous avons déjà signalé cette singularité que les coefficients binominaux ont été connus en Europe pour les extractions de racines , avant d'être connus pour les puissances (v. t. V, p. 494) ; de même la notation exponentielle est donnée ici pour les racines d'abord , et très-complètement , et ensuite pour les puissances , d'une manière moins complète , moins explicite ; nous copions le commencement de la *quinte différence qui traite des racines et nombres* (fol. 21).

« Racine de nombre est ung nombre qui multiplie en soy
» une foys ou plusieurs, selon l'exigence et nature de la
» racine produit précisément le nombre dõt il est racine.
» Ou aultrement racine de nombre si est qui escript et met
» deux ou plusieurs foys lung soubz lautre ou lung pres de
» lautre et puis multiplie le premier par le second et ce que
» en vient par le tiers (se tiers ya) et encores par le quart
» et encores par les aultres (se aultres ya) la derniere mul-
» tiplication soit egale au nombre ou produise le nombre
» duquel il est la racine, et doyt on sçavoir quil sont infinies
» especes de racines : car aucunes sont racines quarrees qui
» sont appelees racines secondes : aucunes sont racines
» cubiques qui sappellent racines tierces : aucunes sont
» racines de racines qui sont dictes racines quartes : ne plus
» avant sont entre les anciens pour la souffisances dicelles
» aux raysons darismetique et de geometrie. Mais les mo-
» dernes sont encrez plus profond en la mer des nombres :
» et ont trouve racines quintes sextes septimes etc. jusques
» ad infinitum. Racines premieres ne se treuvent point
» pourceque tout nombre est racine premiere. Racine
» quarrée ou seconde est celle qui posee en deux places lune
» soubz lautre et puis multiplie lune par lautre produit le
» nombre duquel elle est racine quarrée ou seconde. Et le
» nombre qui en est produit est nombre quarré. Comme 4
» et 4 quil multiplie lung par lautre font 16. Ainsi la ra-
» cine quarrée ou seconde de 16 si est 4 et 16 est nombre
» quarré. Et se peult noter qui veult ceste racine en met-
» tant et sus $\sqrt{\quad}$, comme qui voudrait escrire la racine se-
» conde de 16, on le peult ainsi mettre $\sqrt{16}$ etc. Neanmoins
» quand on trouve devant ung nombre une $\sqrt{\quad}$ sans nulle
» note il sentend que ce soit la racine quarrée. Racine cu-
» bique ou tierce est celle qui mise en troys lieux et puis
» multipliee la premiere par la seconde et ce qui en vient

» par la tierce la dernière multiplication est le nombre dont
 » il est racine. Et le nombre qui en vient est nombre cubic.
 » Comme 4 mys en troys places ainsi 4.4.4 (note 4) et puis
 » multipliez lung par laultre montent 64 qui est nombre
 » cubic : donc sa racine cubique est 4 que l'on peult es-
 » cripre ainsi $\text{R}^3 64$ ou ainsi $\text{R}^3 64$. Racine de racine ou racine
 » quarte est celle que couchee en quatre places et puis mul-
 » tiplices lung par laultre ainsi comme dessus est dict res-
 » titue le nombre dont elle racine quarte comme 2.2.2.2
 » qui multipliez lung par laultre jusques au quart font 16.
 » Donc sa racine de sa racine ou sa racine quarte est 2 que
 » l'on peut ainsi noter $\text{R}^4 16$ ou ainsi R^4 il ya daultres ra-
 » cines comme racines quintes sixiemes septiemes etc. qui
 » se peuvent ainsi noter R^5 . R^6 . R^7 et ainsi des aultres racines
 » continuant sans fin convient entendre en les multipliant
 » cinq foys ou six et sept foys ou tant de foys que la nature
 » de la racine le requiert. Toutes telles racines comme les
 » susdictes sont appellees racines simples. »

L'auteur passe aux racines *composées*, par exemple :
 $7 + \sqrt{5}$ ou $7 - \sqrt{5}$; il ne connaît pas encore nos signes
 plus et moins. Il se sert de la lettre *p* pour le *plus*, et de la
 lettre *m* gothique pour le *moins*. Il faut remarquer que de
 la Roche a écrit en 1520, et le premier ouvrage imprimé
 où l'on rencontre nos signes actuels est de Christophe Ru-
 dolf de Jawer, imprimé en 1524 (*); le célèbre Michel Stifel
 en a donné une seconde édition en 1571, sous ce titre : *Die
 Coss Christophs Rudolfs mit schönen Exempler der Coss durch
 Michael Stifel gebessert et seher gemehrt*, 1571, 491 p. in-4.
 « La Coss de Christophe Rudolf avec de beaux Exemples de la
 » Coss, par Michel Stifel, améliorée et très-augmentée » ;
 c'est le premier ouvrage qui ait introduit l'algèbre ou l'art

(*) Non en 1522. Voir Aperçu historique sur les méthodes, p. 540.

cossique en Allemagne ; il paraîtrait même que Rudolf n'a fait que copier un ouvrage de la bibliothèque de Vienne , car il énonce les propositions sans aucune démonstration ; c'est Stifel qui a ajouté les démonstrations , de sorte que les signes + et — sont peut-être plus anciens que 1524 ; du reste nous reviendrons sur cet ouvrage.

De la Roche distingue encore les racines *liées* ; ce sont celles de la forme $\sqrt{7 + \sqrt{5}}$, il écrit $\sqrt{7 + \sqrt{5}}$. 5. Dans les chapitres suivants, il apprend à réduire des radicaux dissemblables à la même dénomination, et donne des exemples très-détaillés pour faire les quatre opérations comme nous les faisons aujourd'hui, sur les expressions radicales, mais il ne donne l'extraction numérique que de la racine carrée et cubique. Il emploie la méthode des *moyennes* pour approcher des racines.

Exemple : $\sqrt{6}$; comprise entre 2 et 3 ; il essaye $2\frac{1}{2}$, et trouve que la racine est entre 2 et $2\frac{1}{2}$; ensuite entre $2\frac{1}{2}$ et $2\frac{1}{3}$; puis il prend pour moyennes $2\frac{2}{5}$, car, dit-il, en ajoutant respectivement les numérateurs et les dénominateurs de deux fractions, on obtient une moyenne (fol. 23) ; et parvient à la valeur par excès, $2\frac{881}{3960}$; l'excès sur 6 est $\frac{1}{3841600}$. On voit ici le germe de la méthode d'approximation pour les racines des équations appliquée à l'équation $x^2 - 6 = 0$.

Chez les Indiens aussi le calcul des radicaux est donné d'une manière étendue et très-complète ; tandis que les élévations aux puissances ne sont indiquées que pour $(a + b)^2$ et $(a + b)^3$; mais ils considèrent aussi les racines imaginaires, et particulièrement $\sqrt{-1}$, dont on ne rencontre, à ce que je sache, aucune trace de calcul en Europe avant le dix-septième siècle. Venons à la notation exponentielle : elle est

au commencement de la sixième différence (fol. 29 verso).

La sixieme difference qui traicte de la regle de la chose et de la quantité : est divisee en 12 chapitres dont le premier traicte des termes et caractères de ceste regle.

« Ceste regle est de si merveilleuse excellence quelle ex-
» cede et surmonte toutes les aultres ; car elle fait tout ce
» que les autres font : et si fait oultre et par dessus innu-
» merables comptes de inestimable profundite : et pour ce
» est appellee regle de la chose ou regle de 1 qui sont prin-
» cipes transcendants pource quelle transcende toutes les
» regles darismetique. Maistre Nicolas Chuquet en son tri-
» party rappelle la regle des premiers qui vault autant a
» dire comme la regle des unités ou de 1. Aulcunes nations
» lappellent algebra : et les aultres almucabala ; et a brief
» parler ceste regle est la clef l'entree et la porte des abismes
» qui sont en la science des nombres.

» Nombre autant qu'il est expedient a notre propos est
» pris ici largement non pas tant seulement en tant quil est
» collection de plusieurs unites : mais soit 1 ou partie et
» parties de 1. Comme est tout nombre rout quelconque
» nombre que ce soit est entendu et considéré en moult de
» manieres. Lune et la premiere si est que lon peut con-
» siderer ung chacun nombre comme quantité discrete : ou
» comme nombre simplement prins sans aulcune denomi-
» nation comme 12 ou 13 ou aultre, etc. Secondement ung
» chascun nombre est considere comme quantité continue
» que aultrement on dit nombre linear qui peult etre ap-
» pelle chose ou premier : et telz nombres seront notez ap-
» position de une unite au dessus deulx en ceste maniere
» 12^r ou 13^r, ect., ou telz nombres seront signes dung tel
» caracte apres eux comme 12._p ou 13._p. Tiercement tout
» nombre est considere nombre superficial quarre qui peult
» estre appele champ ou second qui se peult ainsi quoter

» 12^2 ou 13^3 , etc., ou ainsi $12.&$ ou $13.&$, etc. Quartement
» toutes manieres de nombres peuvent estre entendues nom-
» bres tiers que lon dict nombres cubiez : autrement cubes
» que lon peut ainsi marquer 12^3 . ou 13^3 . et ou ainsi $12[\square]$.
» ou $13[\square]$. et on les peult aussi entendre estre nombres
» quartz ou quarres de quarres que nous appellons champs
» de champs qui se peuvent ainsi signer. 12^4 ou 13^4 , etc.,
» ou ainsi $12.c&$. ou $13.c&$, etc., et semblablement on les
» peult considerer estre quintz, sixiemes, septiemes, ou
» huytiemes, et ainsi continuant et si avant que lon y veult
» entrer en mettant a chascune difference de nombre sa de-
» nomination au dessus de luy par la maniere devant dicte
» et par ainsi les nombres qui sont nulle denomination sont
» occupans le premier lieu ou l'ordre des differences. Les
» choses ou les premiers cest a seavoir ceux dont leur de-
» nomination est 1 sont au second ordre Les champs (note 5)
» ou les seconds sont au tiers lieu. Les cubes ou tiers sont
» apres prochains ensuyvans : et puis les champs de champs
» en quartz et en apres les quintz. Et ainsi des aultres selon
» progression naturelle des nombres. »

Cette exposition donne lieu à plusieurs observations.

On voit l'enthousiasme extraordinaire qu'a excité parmi les géomètres l'apparition de l'algèbre, venue des Arabes par l'intermédiaire des Italiens et désignée aussi sous le nom de règle de la chose ou règle cossique. On connaît l'origine de cette denomination (*Nouvelles Annales*, t. V, p. 320). Cet enthousiasme était naturel; c'était pour ainsi dire la découverte d'un monde nouveau dans la science des nombres. Tout ce qui était difficile dans l'*algorisme* ancien devenait extrêmement facile pour l'*algorisme* nouveau. L'idée qu'on s'est formé de l'algèbre était analogue à celle qui existait sur l'arithmétique. Ni les Grecs, ni les Romains, ne possédaient la première notion d'une arithmétique chiffrée. Ils avaient

bien des instruments pour faciliter les opérations mentales du calcul ; mais ils ne connaissaient aucun instrument pour les écrire facilement. On a souvent confondu ces deux espèces de facilités. Le *zéro indien*, âme de toute arithmétique chiffrée, leur manquait complètement. L'existence des abaqués prouvent même incontestablement l'absence du zéro ; aussi dès que ce caractère fut connu en Europe, les abaqués disparurent. La difficulté d'écrire les nombres fit que dans toutes les démonstrations arithmétiques, on trouva plus simple de représenter les nombres par des lignes et de donner ainsi à l'arithmétique une apparence géométrique. C'est ce que nous voyons dans Euclide, Boèce et ses nombreux copistes. De là aussi les dénominations de nombres linéaires, superficiels, solides, supersolides, etc. Sous l'empire de ces idées, et par analogie, on conçut la chose inconnue, notre x , non pas comme un nombre *discret* mais comme une quantité *continue* comme une ligne. Et on figura la chose quand elle était linéaire par l'*unité* placée à droite et au-dessus du multiplicateur que nous nommons aujourd'hui coefficient ; ainsi $12x$ s'écrivait 12^1 ; de même pour la chose superficielle ; ainsi $12x^2$ s'écrivait 12^2 et ainsi de suite, comme il a été clairement expliqué ci-dessus, et l'on voit que pour les quatre premiers degrés, on avait adopté des signes particuliers et dans tout le cours de l'ouvrage, pour la partie algébrique, l'auteur emploie ces signes et non les exposants, dont il donne d'ailleurs la règle comme d'*addition* et de *soustraction* des exposants. Ainsi il écrit $12^1.12^2=144.12^3$ correspondant à notre équation $12x.12x^2=144x^3$, etc. Il résulte de tout ce qui précède que la notation exponentielle de De la Roche est uniquement affectée à la quantité *coissique*, et n'a pas la généralité philosophique de la notation cartésienne, quoiqu'elle ait pu y conduire. Il est peu probable que Descartes

ait eu connaissance de l'Arismetique du maistre Lyonnais ; car on sait que l'illustre philosophe pensait beaucoup et lisait très-peu , et même en ce point , grand nombre de professeurs français sont restés au moins à demi cartésiens. D'ailleurs Descartes emploie la notation et ne dit nulle part , à ce que je sache , qu'il en soit l'inventeur (*) ; il ne connaît même pas la notation *radicale* de De la Roche ; pour $\sqrt[3]{12}$ que De la Roche écrit $\sqrt[3]{12}$, Descartes met $\sqrt{C.12}$ se servant de C lettre initiale du mot cubique. Nul doute qu'il n'eût aussi adopté ce signe s'il l'avait eu sous les yeux. Du reste De la Roche a copié sa notation dans d'autres ouvrages peut-être dans ceux de Nicolas Cuchet qu'il cite en plusieurs endroits. Le reste de l'ouvrage est consacré à donner les règles cossiques (pour résoudre l'équation du premier degré à une inconnue) et une foule de questions d'arithmétique résolues à l'aide de ces équations ; de même l'équation du deuxième degré, sans discussion des racines ; et l'équation du troisième, quatrième degré de la forme $ax^3=b$; $ax^4=b$, etc., ou encore $ax^5=bx$, etc. ; viennent ensuite les applications mercantiles de l'arithmétique, qui forment la seconde partie de l'ouvrage, et le tout est terminé par l'application de la science des nombres aux *mesures de géométrie* ; triangles, rectanglès, cercles, pyramides, sphères, etc. Sur le verso de la feuille 158 est gravé un canon monté sur son affût, selon la construction du temps, et portant cette inscription sur la volée : *terrebo si non percussero* ; le boulet et la fumée sortant de la pièce mettent en fuite des oiseaux de proie.

(*) Il est très-pénible de faire des recherches dans l'édition de M. Cousin, faute d'une table raisonnée et complète des matières, premier devoir que les éditeurs d'autrefois ne manquaient jamais de remplir.

NOTES.

Note (1). *L'arismetique*. Les Grecs prononcent le θ , comme les Anglais le *th*, et que les étrangers à cette prononciation rendent par la lettre sifflante *s*; le Pisan Fibonacci (filius Bonacci), le premier auteur chrétien qui ait fait connaître l'algèbre en Europe, au commencement du XIII^e siècle, écrit aussi arismetica (Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, t. II, p. 288).

Note (2). Il est singulier qu'aucun bibliographe, aucun historien des mathématiques n'ait cité cet auteur. Il est omis par Wallis, Heilbronn, Montucla, Kastner, Mürhard; M. Chasles est, je crois, le premier qui ait attiré l'attention sur cet ouvrage si important sous le rapport historique.

Note (3). *Boëce*. *Anicius Manlius Severinus Boethius*. Théologien, philosophe, orateur, poète et mathématicien, exécuté par ordre du roi Théodoric en 524. Nous consacrerons un article spécial à l'arithmétique de cet homme si supérieur à son siècle. Il présente des passages obscurs. Bonne fortune, pour qu'avec de l'érudition et de l'esprit, on puisse faire entrer dans un auteur et en faire sortir tout ce qu'on veut.

Note (3). *Différences*. Fibonacci appelle *distinctiones* les divisions de son ouvrage; dénomination empruntée aux Arabes.

Note (4). Ce serait une erreur de croire que le point placé ici entre les nombres désigne une *multiplication*. C'est uniquement un point de séparation. Fibonacci emploie le point, comme les Indiens pour désigner le signe $+$; ainsi $a.3$ veut dire $a+3$; mais chez les Indiens le point placé sur la lettre désigne le signe $-$; ainsi \dot{a} veut dire $-a$; c'est Leibnitz qui a adopté le point pour marquer la multiplication et nous avons proposé d'adopter la notation indienne pour désigner un multiple quelconque du nombre; ainsi 7 signifierait un multiple de 7 et selon Legendre $M(7)$.

Note (5). *Champ ou carré*. La mesure des propriétés territoriales a donné naissance à la géométrie; de là les Arabes ont désigné le carré par *mâl* (possession); les Grecs par $\deltaυναμις$, puissance, les Latins par *census*, revenus des biens, et de là le mot *champ*.

En sanscrit le carré est désigné par les mots Varga et Kriti ; le premier signifie *classe, caste* ; peut-être par allusion aux quatre castes. Kriti désigne dans la prosodie une espèce de stance, composée de *quatre* vers de vingt syllabes. Je dois ce dernier renseignement à M. Munk, savant orientaliste de la bibliothèque royale.