

TERQUEM

**Questions d'examen. Théorème sur les moyennes et extrêmes raisons dans les coniques et sur les cordes passant par un point fixe et divisées en raison donnée**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6 (1847), p. 28-33

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_28\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_28_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

QUESTIONS D'EXAMEN. (Voir t. V, p. 702.)

*Théorème sur les moyennes et extrêmes raisons dans les coniques et sur les cordes passant par un point fixe et divisées en raison donnée.*

1. THÉOREME. Si par un point donné dans le plan d'une conique, on mène des cordes et qu'on divise ces cordes en moyenne et extrême raison, le lieu du point de division est le système de deux lignes du quatrième ordre.

*Démonstration.* Je prends le point fixe pour origine et pour axes, des parallèles aux axes principaux; l'équation de la conique sera de la forme  $Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$  et passant aux coordonnées polaires,

$$z^2(A\sin^2\varphi + C\cos^2\varphi) + z(D\sin\varphi + E\cos\varphi) + F = 0;$$

soient  $z'$  et  $z''$  les deux racines correspondant à une valeur donnée de  $\varphi$ ; de sorte que  $z' = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$ ;  $z'' = \frac{a - \sqrt{b}}{c}$ ; la

longueur de la corde est  $\frac{2\sqrt{b}}{c}$ ; soit  $\rho$  la coordonnée polaire du point qui divise la corde en moyenne et extrême raison;

on aura  $(\rho - z'')^2 = \frac{2\sqrt{b}}{c}(z' - \rho)$ ; d'où

$$\begin{aligned}
 [c\rho - a + \sqrt{b}]^2 &= 2\sqrt{b} [a - c\rho + \sqrt{b}]; \\
 [(c\rho - a)^2 - b]^2 &= 16b(c\rho - a)^2; \\
 (c\rho - a)^4 - 18b(c\rho - a)^2 + b^2 &= 0; \\
 [(c\rho - a)^2 - 9b]^2 &= 80b^2; \\
 (c\rho - a)^2 - 9b &= \pm 4b\sqrt{5}; \\
 (c\rho - a)^2 &= b(9 \pm 4\sqrt{5}) = b(2 \pm \sqrt{5})^2.
 \end{aligned}$$

Mettant pour  $a, b, c$  leurs valeurs il vient :

$$\begin{aligned}
 [2\rho(A\sin^2\varphi + C\cos^2\varphi) + D\sin\varphi + E\cos\varphi]^2 &= [(D^2 - 4AF)\sin^2\varphi + \\
 + (E^2 - 4CF)\cos^2\varphi + 2DE\sin\varphi\cos\varphi] [2 \pm \sqrt{5}]^2.
 \end{aligned}$$

Passant aux coordonnées rectangulaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
 [2Ay^2 + 2Cx^2 + Dy + Ex]^2 &= [(D^2 - 4AF)y^2 + (E^2 - 4CF)x^2 + \\
 + 2DExy] [2 \pm \sqrt{5}]^2.
 \end{aligned}$$

Système de deux lignes du quatrième ordre; l'origine est un point conjugué à la courbe.

#### *Cas particuliers.*

1° Le point est un centre; alors  $D=E=0$ ; ôtant le facteur  $Ay^2 + Cx^2$  commun aux deux membres, il vient :

$$Ay^2 + Cx^2 = \sqrt{-F}(2 \pm \sqrt{5});$$

système de deux coniques concentriques et homothètes à la conique donnée; il faut d'ailleurs se rappeler que dans l'ellipse  $F$  est essentiellement négatif et qu'on peut le rendre tel dans l'hyperbole; ainsi  $\sqrt{-F}$  est toujours réelle.

Ce résultat peut être obtenu *a priori* pour l'ellipse. En effet le cercle donne intuitivement pour lieu deux cercles concentriques. Or la projection d'une ligne divisée en moyenne et extrême raison est divisée de la même manière;

et les projections des deux cercles concentriques donnent deux ellipses homothètes concentriques.

2° Le point est un foyer ; alors  $D^2 - 4AF = E^2 - 4CF$  ; et  $D=0$  ; l'équation se réduit à :

$$[2Ay^2 - 2Cx^2 + Ex]^2 = 2(y^2 + x^2) \sqrt{-AF} \cdot (2 \pm \sqrt{5}).$$

3° Le point est sur la conique ; alors  $F=0$  ; l'équation devient :

$$2Ay^2 + 2Cx^2 + Dy + Ex = (Dy + Ex) (2 \pm \sqrt{5}) ;$$

$$2Ay^2 + 2Cx^2 = [Dy + Ex] [1 \pm \sqrt{5}] ;$$

système de deux coniques dont les axes principaux sont parallèles aux axes principaux de la conique donnée.

4° Le point est à l'infini. L'analyse précédente n'est plus applicable, les cordes sont parallèles et doivent être données de direction ; soit donc  $Ay^2 + Cx^2 + Ex = 0$  l'équation de la conique, l'axe des  $y$  étant parallèle à la direction de la corde ; soit  $t$  l'ordonnée du point de division de la corde correspondant à l'abscisse  $x$  ; on a donc :

$$(t+y)^2 = 2y(y-t) ; \quad y^2 - t^2 = -4ty ; \quad (y^2 - t^2)^2 = 16t^2y^2 ;$$

remplaçant  $y^2$  par sa valeur en  $x$  :

$$[At^2 + Cx^2 + Ex]^2 = -16t^2(Cx^2 + Ex)A ;$$

$$A^2t^4 + 18At^2(Cx^2 + Ex) + (Cx^2 + Ex)^2 = 0 ;$$

$$[At^2 + 9(Cx^2 + Ex)]^2 = 80(Cx^2 + Ex)^2 ;$$

$$At^2 + (Cx^2 + Ex) (2 \pm \sqrt{5}) = 0 ;$$

système de deux coniques ; si, les axes étant rectangulaires, on a :

$$A = C(2 \pm \sqrt{5}) ;$$

les courbes deviennent des cercles.

*Observation.* L'équation générale est réductible lorsque le second membre a un facteur commun avec le premier, et cela n'a lieu que lorsque  $D=E=0$ , c'est-à-dire, lorsque le point

fixe est au centre; une réduction a aussi lieu lorsque le second membre est un carré parfait; ce qui n'est possible : 1° que lorsque  $F=0$ , c'est-à-dire lorsque le point donné est sur la conique; 2° que lorsque :

$$D^2E^2 - (D^2 - 4AF)(E^2 - 4CF) = 0;$$

$$AE^2 + CD^2 - 4ACF = 0;$$

et alors si A et C sont de même signe, la conique se réduit à un point; s'ils sont de signes différents, la conique se réduit à deux droites; on a donc ce théorème :

*Si par un point fixe dans le plan de deux droites, on mène une droite; et si l'on partage en moyenne et extrême raison la portion interceptée entre les deux droites données, le lieu du point de division est un système de deux coniques.*

Il est utile de démontrer ce théorème directement pour les droites convergentes ou parallèles.

Il est à remarquer que *quatre points* divisent une longueur donnée en moyenne et extrême raison; deux points sont situés sur la droite et à égale distance du point milieu et les deux autres points sur deux prolongements et aussi à égale distance du point milieu. Euclide n'indique qu'un point, parce qu'il a pour but non la détermination de ce point, mais la détermination des deux segments *additifs*. L'analyse algébrique, à laquelle la géométrie doit tous ses perfectionnements a montré qu'il fallait considérer aussi les segments *soustractifs*, de sorte que la solution est devenue *double* chez les modernes; mais lorsqu'au lieu de la *grandeur absolue* de segments, on considère les *points de division*, on arrive au nombre quatre; et c'est ce qui donne lieu à la ligne du quatrième degré dans le problème précédent: en général soient  $x$  et  $y$  deux segments d'une droite de longueur  $a$ ; qu'ils soient *additifs* ou *soustractifs*, on a toujours par la théorie géométrique des signes, l'équation  $x+y=a$ ; supposons qu'on donne entre

$x$  et  $y$  une relation  $f(x, y)=0$  de degré  $n$ , on obtient, généralement parlant,  $n$  longueur pour les segments et  $2n$  points de division; prenons pour exemple le problème de la moyenne et extrême raison: on a  $x+y=a$ ; ensuite la seconde relation peut s'écrire  $x^2=ay$  ou bien  $ax=y^2$ ; ce qui donne quatre points; et les quatre valeurs de  $x$  sont les racines de l'équation du quatrième degré:

$$(x^2+ax-a^2)(x^2-ax+a^2)=0;$$

telle est l'analyse complète de ce problème qui est un cas particulier de celui qui est exprimé par les deux équations:  $x+y=a$ ;  $x^m=a^{m-1}y$ ; d'où l'on déduit  $x^m+a^{m-1}x-a^m=0$ ; pour appliquer la théorie des équations, il faut rendre les coefficients numériques; faisant  $x=az$ ,  $z$  est un nombre; et l'on a  $z^m+z-1=0$ ; équation que M. Yvon a discutée dans les *Nouvelles Annales* (t. II, p. 321); il est évident qu'elle a toujours une racine positive  $> \frac{1}{2}$ , et par conséquent  $x > \frac{1}{2}a$ , et qu'elle n'a de racine rationnelle que lorsque  $m=1$ .

Si on prend pour seconde relation  $x^m=a^{m-1}y$ , on parvient après avoir fait  $x=az$  à l'équation numérique

$$z^m=(1-z)^{m-1},$$

qui n'a pas encore été discutée.

II. THÉORÈME. Si une corde inscrite dans une conique passe par un point fixe et qu'on la partage en raison donnée, le lieu du point de division est une ligne du quatrième degré.

*Démonstration.* Conservons la même notation que dans le théorème précédent;  $\frac{2\sqrt{b}}{c}$  est la longueur de la corde;

$\frac{a + \sqrt{b} - c\rho}{c}$  un de ses segments : supposons que le rapport donné de ces deux quantités soit  $p$  ; on aura :

$$\frac{2\sqrt{b}}{a + \sqrt{b} - \rho} = p; \text{ d'où } b(2-p)^2 = a^2 p^2; \text{ remplaçons } a \text{ et } b$$

par leurs valeurs et ensuite  $\sin\varphi$  et  $\cos\varphi$  par  $\frac{y}{\rho}$  et  $\frac{x}{\rho}$ , on obtient finalement :

$$\begin{aligned} [y^2(D^2 - 4AF) + x^2(E^2 - 4CF) - 2DExy](2-p)^2 = \\ = p^2[2Ay^2 + 2Cx^2 + Dy + Ex]^2; \end{aligned}$$

équation dont la discussion est analogue à celle du théorème précédent.

*Observation.* Si l'on fait  $p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ , on retombe sur l'équation obtenue ci-dessus. Ainsi le problème de la moyenne et extrême raison est un cas particulier de la division de la corde en raison donnée. Je dois à M. Gerono cette instructive observation.

---