

HUET

**Questions d'examen. Résolution de quelques questions conduisant à des équations qui peuvent se ramener à celles du second degré, par un choix convenable d'inconnues auxiliaires**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6 (1847), p. 277-286

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_277\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_277_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

QUESTIONS D'EXAMEN.

*Résolution de quelques questions conduisant à des équations qui peuvent se ramener à celles du second degré, par un choix convenable d'inconnues auxiliaires. (t. V, p. 389.)*

**PAR M. HUET.**

Regent de mathématiques spéciales au collège de Toulon, licencié ès sciences mathématiques.

—

I.

On demande de trouver quatre nombres en proportion par

quotient, connaissant la somme  $a$  des extrêmes, la somme  $b$  des moyens, et la somme  $c$  des cubes des quatre termes.

En appelant  $x, y, z, t$  les quatre nombres cherchés, on a à résoudre le système de 4 équations :

$$xt = yz \quad (1)$$

$$x + t = a \quad (2)$$

$$y + z = b \quad (3)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = c \quad (4)$$

Les équations (2) et (3) donnent :

$$x^3 + 3x^2t + 3xt^2 + t^3 = a^3$$

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = b^3$$

donc  $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + 3xt(x+t) + 3yz(y+z) = a^3 + b^3$  ;

ou en ayant égard à (1), (2), (3), (4)

$$3xt(a+b) = a^3 + b^3 - c,$$

d'où 
$$xt = \frac{a^3 + b^3 - c}{3(a+b)}. \quad (5)$$

En combinant maintenant (2) et (5), on aura les valeurs de  $x$  et  $t$  ; puis en combinant (3) et (5), on aura celles de  $y$  et  $z$ .

## II.

Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme  $a$  des extrêmes, la somme  $b$  des moyens, et la somme  $c$  des quatrièmes puissances des quatre termes.

On a immédiatement les équations :

$$xt = yz \quad (1)$$

$$x + t = a \quad (2)$$

$$y + z = b \quad (3)$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = c \quad (4)$$

Les équations (2) et (3) donnent :

$$x^4 + 4x^3t + 6x^2t^2 + 4xt^3 + t^4 = a^4$$

$$y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 = b^4$$

donc

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xt(2x^2 + 3xt + 2t^2) + 2yz(2y^2 + 3yz + 2z^2) = a^4 + b^4;$$

ou à cause de (1) et (4)

$$4xt(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 3xt) = a^4 + b^4 - c;$$

mais (2) et (3) donnent :

$$x^2 + t^2 = a^2 - 2xt,$$

$$y^2 + z^2 = b^2 - 2yz;$$

donc 
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2 + b^2 - 4xt;$$

et par suite on a :

$$4xt(a^2 + b^2 - xt) = a^4 + b^4 - c$$

d'où 
$$x^2 t^2 - (a^2 + b^2)xt + \frac{a^4 + b^4 - c}{4} = 0,$$

équation du deuxième degré en  $xt$ , et qui donnera :

$$xt = yz = \mathbf{M} \tag{5}$$

et 
$$xt = yz = \mathbf{M}' \tag{6}$$

En combinant (2) et (5), puis (2) et (6), on aura les valeurs de  $x$  et  $t$ .

Enfin en combinant (3) et (5), puis (3) et (6), on aura les valeurs de  $y$  et  $z$ .

### III.

Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme  $a$  des extrêmes, la somme  $b$  des moyens, et la somme  $c$  des cinquièmes puissances des quatre termes.

On a à résoudre le système :

$$xt = yz \tag{1}$$

$$x + t = a \tag{2}$$

$$y + z = b \tag{3}$$

$$x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = c \tag{4}$$

Les équations (2) et (3) donnent :

$$x^5 + 5x^4t + 10x^3t^2 + 10x^2t^3 + 5xt^4 + t^5 = a^5$$

$$y^5 + 5y^4z + 10y^3z^2 + 10y^2z^3 + 5yz^4 + z^5 = b^5$$

donc

$$x^5 + y^5 + z^5 + t^5 + 5xt(x^3 + t^3 + 2x^2t + 2xt^2) + 5yz(y^3 + z^3 + 2y^2z + 2yz^2) = a^5 + b^5;$$

ou en ayant égard à (1) et (4)

$$5xt[x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + 2xt(x + t + y + z)] = a^5 + b^5 - c.$$

Mais (2) et (3) donnent :

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2t + 3xt^2 + t^3 &= a^3 \\ y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 &= b^3; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 &= a^3 + b^3 - 3xt(x+t) - 3yz(y+z) = a^3 + b^3 - \\ &\quad - 3xt(a+b); \end{aligned}$$

par suite

$$5xt[a^3 + b^3 - xt(a+b)] = a^5 + b^5 - c;$$

$$\text{d'où} \quad x^2t^2 - \frac{a^3 + b^3}{a+b}xt + \frac{a^5 + b^5 - c}{5(a+b)} = 0,$$

équation du deuxième degré en  $xt$  qui donnera :

$$xt = yz = \mathbf{M} \quad (5)$$

$$xt = yz = \mathbf{M}' \quad (6)$$

Alors, en combinant (2) et (5), puis (2) et (6), on aura les valeurs de  $x$  et  $t$ ; et en combinant (3) et (5), puis (3) et (6), on aura celles de  $y$  et  $z$ .

#### IV.

On demande de trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant leur somme  $a$ , celle de leurs carrés  $b$ , et celle de leurs cubes  $c$ .

On a à résoudre le système :

$$xy = yz \quad (1)$$

$$x + y + z + t = a \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = b \quad (3)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = c \quad (4)$$

Posons  $x+t=x'$  (5),  $y+z=y'$  (6). Il en résulte  $y'+x'=a$  (7).

Les équations (5) et (6) donnent

$$x^2 + t^2 = x'^2 - 2xt$$

$$y^2 + z^2 = y'^2 - 2yz;$$

donc  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x'^2 + y'^2 - 2xt - 2yz,$

ou en ayant égard à (1) et (3)

$$4xt = x'^2 + y'^2 - b.$$

Mais (7) donne  $x'^2 + y'^2 = a^2 - 2x'y';$

donc 
$$xt = \frac{a^2 - b - 2x'y'}{4}. \quad (8)$$

De même (5) et (6) donnent

$$x^3 + t^3 = x'^3 - 2x^2t - 3xt^2,$$

$$y^3 + z^3 = y'^3 - 3y^2z - 3yz^2,$$

d'où

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = x'^3 + y'^3 - 3xt(x+t) - 3yz(y+z),$$

et par suite de (1), (2), (4),

$$xt = \frac{x'^3 + y'^3 - c}{3a}.$$

Mais (7) donne

$$x'^3 + y'^3 = a^3 - 3x'^2y' - 3x'y'^2 =$$

$$= a^3 - 3x'y'(x' + y') = a^3 - 3ax'y';$$

donc

$$xt = \frac{a^3 - c - 3ax'y'}{3a}. \quad (9)$$

Des équations (8) et (9) on déduit

$$\frac{a^2 - b - 2x'y'}{4} = \frac{a^3 - c - 3ax'y'}{3a},$$

et par suite

$$x'y' = \frac{a^3 + ab - 4c}{6a}. \quad (10)$$

En combinant ensuite (7) et (10), on a les valeurs de  $x'$  et  $y'$ . La question est alors ramenée au problème I, et par suite elle est résolue.

V.

Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme  $a$  de deux nombres, la somme  $b$  de leurs carrés, et la somme  $c$  de leurs quatrièmes puissances.

On a les quatre équations

$$xt = yz \quad (1)$$

$$x + y + z + t = a \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = b \quad (3)$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = c. \quad (4)$$

Posons

$$x + t = x' \quad (5)$$

$$y + z = y', \quad (6)$$

il en résulte

$$x' + y' = a. \quad (7)$$

Les équations (5) et (6) donnent, comme dans le problème IV,

$$xt = \frac{a^2 - b - 2x'y'}{4}. \quad (8)$$

Ces mêmes équations donnent encore

$$x^4 + 4x^3t + 6x^2t^2 + 4xt^3 + t^4 = x'^4$$

$$y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 = y'^4;$$

d'où

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xt(2x^2 + 2t^2 + 3xt) + 2yz(2y^2 + 2z^2 + 3yz) = x'^4 + y'^4$$

ou à cause de (4) et (1)

$$4xt(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 3xt) = x'^4 + y'^4 - c,$$

et à cause de (3)

$$4xt(b + 3xt) = x'^4 + y'^4 - c. \quad (9)$$

Mais de l'équation (7) on tire

$$x'^4 + y'^4 = a^4 - 2x'y'(2x'^2 + 2y'^2 + 3x'y'),$$

ou à cause de

$$2(x'^2 + y'^2) = 2a^2 - 4x'y'$$

$$x'^4 + y'^4 = a^4 - 2x'y'(2a^2 - x'y');$$

par conséquent l'équation (9) devient

$$4xt(b+3xt)=a^4-2x'y'(2a^2-x'y')-c.$$

Si dans cette équation on remplace  $xt$  par sa valeur (8), on obtient une équation du deuxième degré en  $x'y'$ , qui donnera  $x'y'=M$  (10) et  $x'y'=M'$  (11).

En combinant alors (10) et (7), puis (11) et (7), on obtiendra les valeurs de  $x'$  et  $y'$ . La question est alors ramenée au problème II, et par suite elle est résolue.

## VI.

Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant leur somme  $a$ , la somme  $b$  de leurs cubes, et la somme  $c$  de leurs quatrièmes puissances.

On a à résoudre

$$xt=yz \quad (1)$$

$$x+y+z+t=a \quad (2)$$

$$x^3+y^3+z^3+t^3=b \quad (3)$$

$$x^4+y^4+z^4+t^4=c. \quad (4)$$

Posons

$$x+t=x' \quad (5)$$

$$y+z=y', \quad (6)$$

on en déduit

$$x'+y'=a. \quad (7)$$

On tire de (5) et (6), comme dans le problème IV,

$$xt=\frac{a^2-b-3ax'y'}{3a}. \quad (8)$$

On trouve d'ailleurs, comme dans le problème V,

$$4xt(x^2+y^2+z^2+t^2+3xt)=x'^4+y'^4-c; \quad (9)$$

mais

$$x'^4+y'^4=a^4-2x'y'(2a^2-x'y'),$$

et les équations (5) et (6) donnent

$$x^2+y^2+z^2+t^2=a^2-2x'y'-4tx.$$



En remplaçant ces valeurs dans (9), on a

$$4xt(a^2 - 2x'y' + 3xt) = a^4 - 2x'y'(2a^2 - x'y') - c.$$

Si maintenant on substitue dans cette équation la valeur de  $xt$  (8), on obtient une équation du deuxième degré en  $x'y'$  qui donne  $x'y' = M$  (10) et  $x'y' = M'$  (11).

Combinant (7) et (10), puis (7) et (11), on connaîtra  $x'$  et  $y'$ , et par suite la question sera ramenée à la question I ou à la question II, et par suite elle sera résolue.

## VII.

On demande de trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant leur somme  $a$ , la somme  $b$  de leurs cubes, et la somme  $c$  de leurs cinquièmes puissances.

On a à résoudre les équations

$$xt = yz \quad (1)$$

$$x + y + z + t = a \quad (2)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = b \quad (3)$$

$$x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = c. \quad (4)$$

Posons toujours

$$x + t = x' \quad (5)$$

$$y + z = y', \quad (6)$$

d'où

$$x + y' = a, \quad (7)$$

comme dans le problème IV, on trouve

$$xt = \frac{a^3 - b - 3ax'y'}{3a}. \quad (8)$$

Les équations (5) et (6) donnent

$$x^5 + 5x^4t + 10x^3t^2 + 10x^2t^3 + 5xt^4 + t^5 = x'^5$$

$$y^5 + 5y^4z + 10y^3z^2 + 10y^2z^3 + 5yz^4 + z^5 = y'^5,$$

d'où

$$5xt[x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + 2xt(x + y + z + t)] = x'^5 + y'^5 - c,$$

ou bien à cause de (3) et (2)

$$5xt(b+2axt)=x'^5+y'^5-c; \quad (9)$$

d'ailleurs de (7) on tire

$$x'^5+y'^5=a^5-5x'y'[x'^3+y'^3-2x'y'(x'+y')],$$

ou à cause de

$$\begin{aligned} x'^3+y'^3 &= a^3-3ax'y' \\ x'^5+y'^5 &= a^5-5x'y'(a^3-5ax'y'). \end{aligned}$$

Substituant cette valeur dans (9), on a

$$5xt(b+2axt)=a^5-5x'y'(a^3-5ax'y')-c.$$

Si maintenant on substitue au premier membre de cette équation la valeur de  $xt$  (8), on obtiendra une équation du deuxième degré en  $x'y'$  qui donnera  $x'y'=M$  (10),  $x'y'=M'$  (11).

Alors, en combinant (7) et (10), puis (7) et (11), on aura les valeurs de  $x'$  et  $y'$ , et la question sera ramenée au problème III.

### VIII.

On demande de trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme  $a$  des extrêmes, celle  $b$  des moyens, et l'excès  $c$  de la somme des cinquièmes puissances des extrêmes sur la somme des cinquièmes puissances des moyens.

On a les équations

$$xt=yz \quad (1)$$

$$x+t=a \quad (2)$$

$$y+z=b \quad (3)$$

$$x^5+t^5-y^5-z^5=c. \quad (4)$$

On tire de (2) et (3)

$$x^5+5x^4t+10x^3t^2+10x^2t^3+5xt^4+t^5=a^5$$

$$y^5+5y^4z+10y^3z^2+10y^2z^3+5yz^4+z^5=b^5;$$

d'où

$$x^5+t^5-y^5-z^5+5xt(x^3+2x^2t+2xt^2+t^3) \\ -5yz(y^3+2y^2z+2yz^2+z^3)=a^5-b^5.$$

Mais on a

$$x^3+2x^2t+2xt^2+t^3=(x+t)^3-x^2t-xt^2$$

et

$$y^3+2y^2z+2yz^2+z^3=(y+z)^3-y^2z-yz^2;$$

donc à cause des équations (2), (3) et (4), on a

$$5xt(a^3-x^2t-xt^2)-5yz(b^3-y^2z-yz^2)=a^5-b^5-c,$$

ou

$$5xt[a^3-xt(x+t)]-5yz[b^3-yz(y+z)]=a^5-b^5-c,$$

ou encore, à cause de (2), (3) et (1),

$$5xt[a^3-b^3+xt(b-a)]=a^5-b^5-c,$$

équation du deuxième degré en  $xt$  qui donnera

$$xt=yz=M \tag{5}$$

et

$$xt=yz=M'. \tag{6}$$

Alors, en combinant (2) et (5), puis (2) et (6), on aura  $x$  et  $t$ ; et en combinant (3) et (5), puis (3) et (6), on aura  $y$  et  $z$ .

On trouverait de même quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme des extrêmes, celle des moyens, et l'excès de la somme de cubes des extrêmes sur la somme des cubes des moyens, ou l'excès de la somme des quatrièmes puissances des extrêmes sur la somme des quatrièmes puissances de moyens.

Il existe un grand nombre de questions qu'on peut ramener au deuxième degré par des artifices de calcul semblables aux précédents.