

DE PERRODIL

Question 147. Trouver la développée

de $a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 275-277

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_275_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION 147.

Trouver la développée de $a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$

PAR M. DE FERRODIL ,

élève du collège de la Flèche.

—

Voici un calcul qui conduit au résultat indiqué.

$$\begin{aligned} a^2x dx + b^2y dy - 2(x^2 + y^2)(x dx + y dy) &= 0 \\ a^2dx^2 + b^2dy^2 + b^2y d^2y - 4(x dx + y dy)^2 - \\ &- 2(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2 + y d^2y) = 0, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{a^2x - 2(x^2 + y^2)x}{b^2y - 2(x^2 + y^2)y} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{\beta y}, \end{aligned}$$

en posant, pour abrégé, $a^2 - 2(x^2 + y^2) = \alpha,$
 $b^2 - 2(x^2 + y^2) = \beta,$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{y^2\beta^2(a^2 - 4x^2) + x^2\alpha^2(\beta - 4y^2) + 8x^2y'\alpha\beta}{y^3\beta^3} = \\ &= \frac{+\alpha\beta(a^2x^2 + b^2y^2) + 4x^2y^2c^4}{y^3\beta^3}. \end{aligned}$$

Donc
$$R = \frac{(a^2x^2 + \beta^2y^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha\beta(x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2c^4}.$$

Soient X et Y les coordonnées courantes du lieu, on sait qu'on a :

$$X = x + R \cos a, \quad Y = y + R \sin a;$$

$$\cos a = \frac{ax}{(a^2x^2 + \beta^2y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin a = \frac{\beta y}{(x^2x^2 + \beta^2y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$X = \frac{\alpha\beta x(a^2x^2 + b^2y^2) + 4x^3y^2c^4 + \alpha x(a^2x^2 + \beta^2y^2)}{\alpha\beta(x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2c^4},$$

$$X = \frac{4x^3y^2\beta^3 + a^2x^3(c^2 + 4y^2) - 8x^3y^2\alpha\beta}{\alpha\beta(x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2c^4} =$$

$$= \frac{x^3[4y^2\beta(\beta - 2\alpha) + a^2(c^2 + 4y^2)]}{\alpha\beta(x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2c^4};$$

$$X = \frac{x^3(-4y^2\beta c^2 + 4y^2\alpha c^2 + c^2\alpha^2)}{\alpha\beta(x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2c^4} = \frac{c^2x^3(x^2 + 4y^2c^2)}{\alpha\beta(x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2c^4};$$

$$X = \frac{c^2a^4x^3}{\alpha\beta(x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2c^4}.$$

Remplaçant α et β par leurs valeurs, le dénominateur devient :

$$(x^2 + y^2) [(2a^2 - b^2)a^2x^2 + (2b^2 - a^2)b^2y^2].$$

On a donc les deux équations :

$$X = \frac{c^2a^4x^3}{(x^2 + y^2) [(2a^2 - b^2)a^2x^2 + (2b^2 - a^2)b^2y^2]},$$

$$Y = \frac{c^2b^4y^3}{(x^2 + y^2) [(2a^2 - b^2)a^2x^2 + (2b^2 - a^2)b^2y^2]},$$

la valeur de Y se déduisant de celle de X en changeant a en b , x en y , et réciproquement.

Je multiplie la première par b , la seconde par a , et je les élève à la puissance $\frac{2}{3}$; il vient alors :

$$(1) \quad b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} = \left\{ \frac{c^2ab}{(x^2 + y^2) [(2a^2 - b^2)a^2x^2 + (2b^2 - a^2)b^2y^2]} \right\}^{\frac{2}{3}} a^2x^2,$$

$$a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} = \left\{ \frac{c^2ab}{(x^2 + y^2) [(2a^2 - b^2)a^2x^2 + (2b^2 - a^2)b^2y^2]} \right\}^{\frac{2}{3}} b^2y^2.$$

Ajoutant, et prenant la racine des deux membres, il vient :

$$(2) \sqrt{a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}}} = \left\{ \frac{c^2 ab}{(x^2 + y^2)[(2a^2 - b^2)a^2 x^2 + (2b^2 - a^2)b^2 y^2]} \right\}^{\frac{1}{3}} (x^2 + y^2).$$

Si l'on avait multiplié l'équation (1) par $(2a^2 - b^2)$, et la suivante par $(2b^2 - a^2)$, on aurait trouvé en ajoutant :

$$(3) \quad (2b^2 - a^2)a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} + (2a^2 - b^2)b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} = \\ = \left\{ \frac{c^2 ab}{(x^2 + y^2)[(2a^2 - b^2)a^2 x^2 + (2b^2 - a^2)b^2 y^2]} \right\}^{\frac{1}{3}} \\ (2a^2 - b^2)a^2 x^2 + (2b^2 - a^2)a^2 y^2.$$

Enfin, si l'on multiplie l'équation (2) par l'équation (3), on trouve :

$$\sqrt{a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}}} \left\{ (2b^2 - a^2)a^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} + (2a^2 - b^2)b^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} \right\} = (a^2 - b^2).ab$$

L'énoncé de cette question doit renfermer une faute d'impression. Voici le résultat indiqué :

$$\sqrt{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}} \left\{ (2b^2 - a^2)a^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} + (2a^2 - b^2)b^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} \right\} = ab(a^2 - b^2).$$

Il diffère du précédent en ce que dans la parenthèse il y a :

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}, \quad b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad \text{au lieu de} \quad a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}.$$

Observation. J'ai copié l'énoncé tel qu'il m'a été adressé.

Tm.