Nouvelles annales de mathématiques

Rispal

Forme remarquable que peut prendre l'équation qui donne la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 273-275

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__273_1>

FORME REMARQUABLE

que peut prendre l'équation qui donne la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

PAR M. RISPAL,
élève de l'École normale.

Si les termes sont a, b, c.... k, l et la raison δ, on sait que l'on pose ordinairement :

$$b = a + \delta$$
$$c = b + \delta$$
$$d = c + \delta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$l = k + \delta$$

puis on élève chacun de ces binômes à la $n^{ième}$ puissance, ce qui donne :

$$b^m = a^m + ma^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{1-2} a^{m-2}\delta^2 + \ldots + ma\delta^{m-1} + \delta^m$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots + mb\delta^{m-1} + \delta^m$$

. . . .

. . . .

$$l^m = k^m + mk^{m-1}\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots + mk\delta^{m-1} + \delta^m.$$

En ajoutant toutes ces égalités terme à terme on trouve :

$$l^m = a^m + m\delta\,(s_{m-1} - l^{m-1}) + \frac{m\,(m-1)}{1-2}\,\delta^2\,(s_{m-2} - l^{m-2}) + \ldots$$
$$+\, m\delta^{m-1}\,(s_1 - l) + \delta^m\,(s_0 - 1)\,;$$

ou bien, en ordonnant

$$m\delta s_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1-2}\delta^2 s_{m-2} + \ldots\ldots + m\delta^{m-1}s_1 + \delta^m s_0 = l^m +$$
$$+\, m\delta l^{m-1} + \ldots + m\delta^{m-1}l + \delta^m - a^m = (l+\delta)^m - a^m\,;$$

or le premier membre de l'égalité peut se mettre sous la forme

$$s_m + m\delta s_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1-2}\,\delta^2 s_{m-2} + \ldots + m\delta^{m-1}s_1 + \delta^m s_0 - s_m.$$

Si donc on considère les indices comme des exposants, ce premier membre peut s'écrire sous la forme symbolique :

$$(s+\delta)^m - s_m,$$

dans laquelle les exposants de s devront être regardés comme de véritables indices, et le coefficient de δ^m sera s_0, qui est évidemment égal au nombre n des termes de la progression. On pourra donc, avec ces conventions, écrire l'équation symbolique très-simple :

$$(s+\delta)^m - s_m = (l+\delta)^m - a^m,$$

et comme $l = a + (n-1)\delta$, on aura $l + \delta = a + n\delta$, et

$$(s+\delta)^m - s_m = (a+n\delta)^m - a^m.$$

S'il s'agit de la progression des nombres naturels, $a=1$, $\delta=1$, et la formule devient :

$$(s+1)^m - s_m = (1+n)^m - 1.$$

Soit fait $m=3$, la formule devient en développant :

$$3s_2 + 3s_1 + s_0 = 3n + 3n^2 + n^3;$$

mais $$s_0 = n; \quad s_1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2};$$

donc $$6s_2 + 3n^2 + 3n + 2n = 6n + 6n^2 + 2n^3,$$

$$s_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}.$$