NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOACHIMSTHAL

# Note sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante, inscrite dans un angle rectiligne quelconque

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 6 (1847), p. 260-262

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__260_1>

# NOTE

## *sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante, inscrite dans un angle rectiligne quelconque.*

**PAR M. LE DOCTEUR JOACHIMSTHAL,**
agrégé à l'Université de Berlin.

—

La marche suivante nous paraît la plus simple pour parvenir à une équation symétrique entre les coordonnées. Soit $\gamma$ l'angle des axes, qui est aussi l'angle dans lequel on inscrit la droite de longueur $l$, on a les deux équations

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma=l^2;$$

$x$ et $y$ étant les coordonnées du point de la droite mobile avec l'enveloppe, on trouve, par les méthodes connues :
$l^2x=a^2(a-b\cos\gamma)$; $l^2y=b^2(b-a\cos\gamma)$ (1) (*Nouv. Ann.*, t. I, p. 266).

Faisons $a+b=s$; $ab=p$, et par conséquent

$$l^2+4p\cos^2\frac{1}{2}\gamma=s^2\ ;\ l^2(x+y)=s\left(c^2-2p\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right);$$

$$l^4xy=p^3\sin^2\gamma-l^2p^2\cos\gamma\ ;$$

d'où

$$l^4(x+y)^2=\left[l^2+4p\cos^2\frac{1}{2}\gamma\right]\left[l^2-2p\sin^2\frac{1}{2}\gamma\right]^2.$$

Éliminant $p$ entre ces deux dernières équations, on obtient évidemment une équation symétrique entre les deux coordonnées.

*Note* 1. Ces équations développées peuvent se mettre sous la forme

$$Ap^3+Bp^2+Cp+D=0,$$
$$A'p^3+B'p^2+C'p+D'=0;$$

ou

$$A=\sin^2\gamma,\ B=-l^2\cos\gamma\ ;\ C=0,\ D=-l^4xy,$$

$$A'=4\sin^2\gamma\sin^2\frac{1}{2}\gamma\ ;\ B'=4l^2\sin^2\frac{1}{2}\gamma\left[5\sin^2\frac{1}{2}\gamma-4\right].$$

$$C'=4l^4\cos\gamma\ ;\ D'=l^4\left[l^2-(x+y)^2\right];$$

L'élimination mène à cette équation finale :

$$[AB'.BC'-AC'^2+AD'.AB']CD'-[AB'.BD'-AC.AD']BD'+$$
$$+[AB'.CD'-AD'^2]AD'=0.$$

$AB'$ désigne, non un monôme, mais le binôme alterné $AB'-BA'$, de même $BC'$ désigne $BC'-CB'$, et ainsi des autres. C'est l'équation donnée par Bezout (*Théorie générale des Équations*, p. 300). Le terme le plus élevé est évidemment donné par le binôme $[AD'-DA']^3$; ainsi l'enveloppe est du sixième degré. Faisant les calculs, on obtient :

$$AB'=-3l^2\sin^4\gamma\ ;\ AC'=4l^4\sin^2\gamma\cos\gamma\ ;\ AD'=Ml^4\sin^2\gamma\ ;$$

$$BC'=-4l^6\cos^2\gamma\ ;\ BD'=-Ml^6\cos\gamma-3l^6xy\sin^2\gamma\ ;$$

$$CD'=4l^8xy\cos\gamma\ ;\ \text{où } M=l^2-x^2-y^2-2xy\cos\gamma.$$

Représentons les trois produits qui composent l'équation finale respectivement par P, Q, R, de sorte que l'on a $P-Q+R=0$, il vient :

$$P=-4l'^4xy\cos\gamma\sin^4\gamma[4l'^2\cos^2\gamma+3M\sin^2\gamma];$$
$$Q=-l'^4\sin^4\gamma[M\cos\gamma+3xy\sin^2\gamma][-M\cos\gamma+9xy\sin^2\gamma],$$
$$R=-Ml'^2\sin^6\gamma[12l'^2xy\cos\gamma-M^2];$$

et de là :

$$\sin^2\gamma\,[M^3+27x^2y^2l'^2\sin^2\gamma]-$$
$$-2l'^2xy\cos\gamma\,[8l'^2\cos^2\gamma+9M\sin^2\gamma]-M^2l'^2\cos^2\gamma=0.$$

Lorsque $\gamma=\frac{\pi}{2}$, l'équation se réduit à $M^3+27x^2y^2l'^2=0$ (voyez tome I, p. 266).

II. Cherchons la polaire réciproque de cette enveloppe relativement à l'ellipse donnée par l'équation $y^2+x^2-l^2=0$; désignant par $x'$ et $y'$ les coordonnées du pôle de la droite mobile, on a $x'=\frac{l^2}{a}$, $y'=\frac{l^2}{b}$ (t. II, p. 305); mettant les valeurs de $a$ et $b$ dans la relation $l^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, et ôtant les accents, on obtient pour équation de la polaire réciproque $x^2y^2-l^2(y^2+x^2-2xy\cos\gamma)=0$.

La discussion de cette courbe est l'objet du travail qui suit.

III. Soient $p$, $q$ les coordonnées connues d'un point de la droite mobile dans une de ses positions, et $x$, $y$ les coordonnées du pôle de cette droite; on a, pour déterminer $x$ et $y$, d'abord l'équation qu'on vient de trouver, et ensuite l'équation $qy+px=l^2$, ce qui conduit à une équation du quatrième degré; mais si l'on a $p=q$, alors cette dernière équation fait connaître $x+y$, et l'équation de la polaire réciproque donne $xy$; la question est donc ramenée à une équation du second degré; mais ces divers cas ont été amplement discutés pour l'enveloppe même (page 180), et nous ne nous y arrêterons pas.