NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Mémoire sur la résolution de deux équations à deux inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 243-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__243_1>

MÉMOIRE

sur la résolution de deux équations à deux inconnues.

(Suite. Voyez page 54.)

PAR M. OSSIAN BONNET,
Répétiteur à l'École polytechnique.

Considérons enfin la cinquième des égalités (1), nous en tirons

$$[R_2, R_3]=[r_4, R_3]-[c_4, R_3],$$

d'où, en appelant d_4' le plus grand commun diviseur entre r_4 et c_4,

$$[R_2, R_3]=\left[\frac{r_4}{d_4'}, R_3\right]-\left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right],$$

et substituant dans l'égalité (11)

$$(12)\quad [A_4, B_4]=\left[\frac{r_4}{d_4'}, R_3\right]-\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$$

$$-\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, \mathrm{R}\right]-\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, \mathrm{R}_1\right]-\left[\frac{c_3}{d_3'}, \mathrm{R}_2\right]$$
$$-\left[\frac{c_4}{d_4'}, \mathrm{R}_3\right].$$

Appelons en second lieu d_4'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'}$ et $\frac{c_3}{d_3'}$, je dis que l'on aura

$$[d_4'', \mathrm{R}_3]=[d_4'', \mathrm{R}_2].$$

Il suffit, en effet, de considérer les deux égalités

$$\frac{c_3}{d_3'}\mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2\mathrm{Q}_3+\mathrm{R}_3\frac{r_3}{d_3'},$$
$$\frac{c_4}{d_4'}\mathrm{R}_2=\mathrm{R}_3\mathrm{Q}_4+\frac{r_4}{d_4'}$$

obtenus en divisant la quatrième des égalités (1) par d_3' et la cinquième par d_4', et de raisonner sur ces égalités comme on l'a fait plus haut sur les égalités (a) et (b), ou sur les égalités (c) et (d). La relation

$$[d_4'', \mathrm{R}_3]=[d_4'', \mathrm{R}_2]$$

permet de mettre l'égalité (12) sous la forme

$$(13)\quad [\mathrm{A}_4, \mathrm{B}_4]=\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''}, \mathrm{R}_2\right]-\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, \mathrm{B}\right]$$
$$-\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, \mathrm{R}\right]-\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, \mathrm{R}_1\right]-\left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, \mathrm{R}_2\right]$$
$$-\left[\frac{c_4}{d_4'}, \mathrm{R}_3\right];$$

il suffit de remarquer que

$$\left[\frac{r_4}{d_4'}, \mathrm{R}_3\right]=\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''}, \mathrm{R}_3\right]+[d_4'', \mathrm{R}_3]$$

et

$$\left[\frac{c_3}{d_3'}, \mathrm{R}_2\right]=\left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, \mathrm{R}_2\right]+[d_4'', \mathrm{R}_2].$$

Appelons encore d_4''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'd_4''}$ et $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, je dis que l'on aura

$$[d_4''', R_3]=[d_4''', R_1].$$

En effet, entre les deux égalités

$$\frac{c_2}{d_2'}R=R_1Q_2+R_2\frac{r_2}{d_2'},$$

$$\frac{c_3}{d_3'}R_1=R_2Q_3+R_3\frac{r_3}{d_3'};$$

éliminons R_2; puis l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_3'' plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'}$ et $\frac{c_2}{d_2'}$, il viendra

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}Q_3R=R_1Q_2'+R_3\frac{r_3}{d_3'd_3''}\,\frac{r_2}{d_2'}.$$

Or d_4''' étant un diviseur de $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, on a

$$[d_4''', R_1Q_2']=\left[d_4''', R_3\frac{r_3}{d_3'd_3''}\,\frac{r_2}{d_2'}\right];$$

donc

$$[d_4''', R_1Q_2']=[d_4''', R_3],$$

puisque $\frac{r_2}{d_2'}$, $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$ sont premiers avec $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, et par suite avec d_4'''; donc

$$[d_4''', R_1]\overset{=}{<}[d_4''', R_3].$$

D'un autre côté, si l'on élimine R_2 entre les deux équations

$$\frac{c_3}{d_3'}R_1=R_2Q_3+R_3\frac{r_3}{d_3'},$$

$$\frac{c_4}{d_4'}R_2=R_3Q_4+\frac{r_4}{d_4'},$$

et que, l'élimination faite, on divise de part et d'autre par

d_4'' plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'}$ et $\frac{c_3}{d_3'}$, il viendra :

$$\frac{c_3}{d_3'd_4''}\,\frac{c_4}{d_4'}\,R_1 = R_3 Q_2'' + Q_3 \frac{r_4}{d_4'd_4''},$$

et d_4''' étant un diviseur de $\frac{r_4}{d_4'd_4''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_4}{d_4'}$ et $\frac{c_3}{d_3'd_4''}$, on trouvera de même

$$[d_4''', R_3] \overline{\leq} [d_4''', R_1].$$

Nous conclurons de là

$$[d_4''', R_3] = [d_4''', R_1],$$

et par conséquent, en remarquant que

$$\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''}, R_3\right] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}, R_3\right] + [d_4''', R_3]$$

et

$$\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right] = \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}, R_1\right] + [d_4''', R_1],$$

que l'on peut écrire la relation (13) sous la forme

$$(14)\quad [A_4, B_4] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}, R_3\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$$
$$- \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, R_2\right]$$
$$- \left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right].$$

Appelons encore d_4'''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}$ et $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, je dis que l'on aura

$$[d_4'''', R_3] = [d_4'''', R].$$

Pour le démontrer, entre les deux égalités

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''}Q_2B = RQ_1' + R_2\frac{r_2}{d_2'd_2''}\frac{r_1}{d_1'},$$

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}\frac{c_3}{d_3'}R = R_2Q_1'' + R_3Q_2\frac{r_3}{d_3'd_3''},$$

éliminons R_2, puis, l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_3''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$ et $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$, et par Q_2, qui sera facteur à tous les termes, il viendra

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}Q_1''B = RQ_2''' + R_3\frac{r_1}{d_1'}\frac{r_2}{d_2'd_2''}\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}.$$

Or d_4'''' étant un diviseur de $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, on a

$$[d_4'''', RQ_2'''] = \left[d_4'''', R_3\frac{r_1}{d_1'}\frac{r_2}{d_2'd_2''}\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}\right];$$

donc

$$[d_4'''', RQ_2'''] \leqq [d_4'''', R_3],$$

puisque $\frac{r_1}{d_1'}$, $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$, $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}$ sont premiers avec $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, et par suite avec d_4'''', donc

$$[d_4'''', R] \leqq [d_4'''', R_3];$$

d'un autre côté, si on élimine R_1 entre les deux équations

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}Q_3R = R_1Q_2' + R_3\frac{r_3}{d_3'd_3''}\frac{r_2}{d_2'},$$

$$\frac{c_3}{d_3'd_4''}\frac{c_4}{d_4'}R_1 = R_3Q_2'' + Q_3\frac{r_4}{d_4'd_4''},$$

et que, l'élimination faite, on divise par d_4''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$ et $\frac{r_4}{d_4'd_4''}$, et par Q_3 facteur commun à tous les termes, il viendra :

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}\frac{c_3}{d_3'd_4''}\frac{c_4}{d_4'}R = R_3Q_2'''' + Q_2'\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''},$$

et d_4'''' étant un diviseur de $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_4}{d_4'}$, $\frac{c_3}{d_3'd_4''}$, $\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}$, on trouvera de même

$$[d_4'''', R_3] \overset{=}{<} [d_4'''', R],$$

nous conclurons de la

$$[d_4'''', R_3] = [d_4'''', R]$$

et par suite, en remarquant que

$$\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''}, R_3\right] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''}, R_3\right] + [d_4'''', R_3]$$

$$\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right] = \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}, R\right] + [d_4'''', R],$$

que l'on peut mettre l'égalité (14) sous la forme

$$(15)\ [A_4, B_4] = \left[\frac{r_4}{d'_4d_4''d_4'''d_4''''}, R_3\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$$
$$-\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d'_2d_3''d_4'''}, R_1\right]$$
$$-\left[\frac{c_3}{d'_3d_4''}, R_2\right] - \left[\frac{c_4}{d'_4}, R_3\right].$$

Appelons enfin d_4''''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''}$ et $\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}$, je dis que l'on aura :

$$[d_4''''', R_3] = [d_4''''', B].$$

Pour le démontrer, entre les deux égalités

$$\frac{c}{dd_1''d_2'''}Q''A = BQ_1''' + R_2\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''}\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''},$$

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}\frac{c_2}{d_2'd_3''}\frac{c_3}{d_3'}B = R_2Q_1'''' + R_3Q_1'\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''},$$

eliminons R_2; puis, l'élimination faite, divisons de part et d'autre par d_3'''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$ et $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}$, et par $Q'_1 = Q''$ (*) facteur commun à tous les termes ; il viendra :

$$\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}Q_1''''A=BQ_2'''''+R_3\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''}\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}.$$

Or, d_4''''' étant un diviseur de $\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}$, on a :

$$[d_4''''', BQ_2'''''] = \left[d_4''''', R_3\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''}\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}\right],$$

donc :

$$[d_4''''', BQ_2'''''] = [d_4''''', R_3],$$

puisque $\frac{r}{d}$, $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$, $\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}$, $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}$, sont premiers avec $\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}$, par suite avec d_4''''', donc :

$$\left[d_4''''', B\right] \overline{\overline{<}} \left[d_4''''', R_3\right];$$

d'un autre côté si l'on élimine R entre les deux égalités

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}Q_1''B=RQ_2'''+R_3\frac{r_1}{d_1'}\frac{r_2}{d_2'd_2''}\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''},$$

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}\frac{c_3}{d_3'd_4''}\frac{c_4}{d_4'}R=R_3Q_2''''+Q_2'\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''};$$

et que, l'élimination faite, on divise par d_4'''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$ et $\frac{r_4}{d_4'd_4'd_4'''}$, et par

(*) On peut aisément calculer Q_1' et Q'', et reconnaître la justesse de la relation $Q_1'=Q''$; mais l'égalité de Q_1' et de Q'' tient à une cause générale qu'il est bon d'indiquer, afin de montrer que, si les égalités (1) étaient en plus grand nombre que cinq, les quantités qui remplaceraient Q_1' et Q'' dans les nouvelles égalités que l'on aurait à considérer seraient encore égales. On peut remarquer que Q_1' et Q'' sont, à un même facteur près, les dénominateurs des valeurs de R et R_1 déduites des équations $\frac{c_1}{d_1'}B=RQ_1+R_1\frac{r_1}{d_1'}$ et $\frac{c_2}{d_2'}R=R_1Q_2+R_2\frac{r_2}{d_2'}$.

$Q_1'' = Q_2'$, facteur commun à tous les termes, il viendra :

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}\,\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}\,\frac{c_3}{d_3'd_4''}\,\frac{c_4}{d_4'}B = R_3Q_2''''' + Q_2''' \frac{r_4}{d_4'd_4''d_4''' d_4''''},$$

et d_4''''' étant un diviseur de $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_4}{d_4'}$, $\frac{c_3}{d_3'd_4''}$, $\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}$, $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}$, on trouvera de même

$$\left[d_4''''', R_3\right] \overset{=}{<} \left[d_4''''', B\right];$$

de là nous concluons :

$$[d_4''''', R_3] = [d_4''''', B],$$

et par suite en remarquant que

$$\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''}, R_3\right] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_3\right] + [d_4''''', R_3],$$

et

$$\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right] = \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''d_4'''''}, B\right] + [d_4''''', B];$$

que l'on peut mettre l'égalité (15) sous la forme

$$[A_4, B_4] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_3\right]$$

$$- \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''d_4'''''}, B\right] - \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}, R\right]$$

$$- \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, R_2\right] - \left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right].$$

Actuellement les cinq quotients

$$\frac{c_4}{d_4'},\quad \frac{c_3}{d_3'd_4''},\quad \frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''},\quad \frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''},\quad \frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''d_4'''''},$$

sont premiers avec $\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}$; les solutions

$$\left[\frac{c_4}{d_4'}, R_3\right],\quad \left[\frac{c_3}{d_3'd_4''}, R_2\right],\quad \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''d_4'''}, R_1\right],$$

$$\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''d_4''''}, R\right],\quad \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''d_4'''''}, B\right],$$

sont donc distinctes des solutions $\left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_3\right]$; cela nous montre que ces dernières solutions sont égales à $[A_4, B_4]$; ainsi

$$[A_4, B_4] = \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_4\right],$$

ajoutant cette égalité avec les égalités

$$[A_3, B_3] = \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}, R_2\right] + [A_4, B_4]$$

$$[A_2, B_2] = \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right] + [A_3, B_3]$$

$$[A_1, B_1] = \left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, R\right] + [A_2, B_2]$$

$$[A, B] = \left[\frac{r}{d}, B\right] + [A_1, B_1].$$

précédemment obtenues ; il vient après réductions :

$$[A, B] = \left[\frac{r}{d}, B\right] + \left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, R\right] + \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right] + \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3''d_3'''}, R_2\right] + \left[\frac{r_4}{d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''}, R_3\right].$$

Ce qui ramène la résolution du système proposé, à la résolution de plusieurs systèmes composés d'une équation à une inconnue et d'une équation à deux inconnues, en nombre deux fois moindre que par la méthode de M. Bret.

On peut voir aisément que le résultat précédent coïncide avec le théorème de MM. Labatie et Sarrus. Pour cela je m'appuierai sur un théorème d'arithmétique très-facile à établir, et qui s'énonce ainsi : le plus grand commun diviseur entre un produit *abcd*..., et un nombre n peut s'obtenir, en cherchant le plus grand commun diviseur δ entre a et n, le plus grand commun diviseur δ', entre b et $\frac{n}{\delta}$, le plus grand commun diviseur δ'' entre c et $\frac{n}{\delta\delta'}$, etc., et multipliant entre eux les plus grands communs diviseurs $\delta, \delta', \delta''$... Cela posé d_1' étant le plus grand commun diviseur entre r_1 et c_1, et d_1'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_1}{d_1'}$ et $\frac{c}{d}$, le produit $d_1'd_1''$ sera le plus grand commun diviseur d_1 entre r_1 et $\frac{cc_1}{d}$; de même d_2' étant le plus grand commun diviseur entre r_2 et c_2, d_2'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'}$ et $\frac{c_1}{d_1'}$, et d_2''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$ et $\frac{c}{dd_1''}$, le produit $d_2'd_2''d_2'''$ sera le plus grand commun diviseur d_2 entre r_2 et $\frac{cc_1c_2}{d_1'dd_1''} = \frac{cc_1c_2}{dd_1}$. On verrait de même que $d_3'd_3''d_3'''d_3''''$ est le plus grand commun diviseur d_3 entre r_3 et $\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2}$, et $d_4'd_4''d_4'''d_4''''d_4'''''$ le plus grand commun diviseur d_4 entre r_4 et $\frac{cc_1c_2c_3c_4}{dd_1d_2d_3}$, on a donc :

$$[A, B] = \left[\frac{r}{d}, B\right] + \left[\frac{r_1}{d_1}, R\right] + \left[\frac{r_2}{d_2}, R_1\right] + \\ + \left[\frac{r_3}{d_3}, R_2\right] + \left[\frac{r_4}{d_4}, R_3\right];$$

ce qui est le théorème de MM. Labatie et Sarrus, seulement établi pour les solutions multiples comme pour les solutions simples.