NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Théorème sur le pentagone. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polygone de m côtés, soit circonscrit à une conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 21-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__21_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

THÉORÈME SUR LE PENTAGONE.

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polygone de m *côtés, soit circonscrit à une conique.*

PAR M. PAUL SERRET,
élève en mathématiques.

I.

Théorème sur le Pentagone.

Cinq droites situées dans un même plan, forment généralement cinq quadrilatères; dans chacun d'eux l'on construit la droite qui passe par les milieux des diagonales; et les cinq droites que l'on obtient ainsi, concourent au même point.

1. Ce théorème se déduit immédiatement, comme le remarque M. Terquem (IV, p. 545), du théorème de Newton, sur le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère, et de la considération d'un pentagone circonscrit, dans lequel on retranche successivement chaque côté, en prolongeant les deux adjacents. M. Terquem recommandant aux élèves de démontrer directement cette proposition, en voici une démonstration qui n'exige que peu de calculs, et dans laquelle on fait abstraction de toute conique auxiliaire.

2. Lemme. Dans tout quadrilatère complet, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite.

3. Démontrons d'abord la proposition pour trois des quadrilatères formés par les cinq droites, ces trois quadrila-

tères ayant tous leurs sommets sur les côtés d'un même angle.

Fig. 1. Soient OY et OX deux des cinq droites que nous prenons pour axes des coordonnées ; et soient AB, A_1B_1, A_2B_2 les trois autres droites qui forment dans l'angle YOX et ayant leurs sommets sur les côtés de cet angle, les trois quadrilatères AB_1, AB_2, A_1B_2 (en désignant chaque quadrilatère par le système des lettres de deux sommets opposés) ; soient a, a_1, a_2; b, b_1, b_2, les distances à l'origine des sommets des quadrilatères. Désignons en général, par Dab, la droite qui passe par les milieux des diagonales du quadrilatère AB_1, et prenons les équations des trois droites Dab_1, Dab_2, Da_1b_2.

Dab_1, (1) $$(a-a_1)y+(b-b_1)x+\frac{a_1b_1-ab}{2}=0.$$

Dab_2, (2) $$(a-a_2)y+(b-b_2)x+\frac{a_2b_2-ab}{2}=0.$$

Da_1b_2, (3) $$(a_1-a_2)y+(b_1-b_2)x+\frac{a_2b_2-a_1b_1}{2}=0.$$

Or, si l'on retranche l'équation (1) de l'équation (2), on retrouve l'équation (3), donc les trois droites Dab_1, Dab_2, Da_1b_2 concourent au même point.

Remarque. Cette démonstration s'applique évidemment à chacun des systèmes de trois quadrilatères, qui, formés dans les angles L et M, ont leurs sommets sur les côtés de ces angles.

4. Soient donc d'après le paragraphe précédent.

(a) N le point de concours des trois droites

Dab_1, Dab_2, Da_1b_2, dans l'angle YOX.

(b) N' le point de concours des trois droites

Da_1b_2, Db_1m, Da_1m, dans l'angle KLM.

Pour ce qui est des quadrilatères de l'angle BML, nous y trouvons : 1° le système des deux droites KA_1L, AA_1A_2, dont les deux diagonales immédiates sont les droites KA_2, AL; mais la droite qui passe par les milieux des deux diagonales KA_2, AL, passe aussi par le milieu de la diagonale A_1M; donc, au lieu de considérer la droite qui passe par les milieux des diagonales du système des deux droites KA_1L, AA_1A_2, nous pouvons considérer la droite qui passe par les milieux des diagonales du quadrilatère A_1M, ou Da_1m qui est la même droite. 2° De même, relativement au second système des deux droites KB_1L, BB_1B_2, au lieu de considérer la droite qui passe par les milieux de BL et KB_2, nous considérerons la droite qui passe par les milieux de B_1M et KB_2, ou Db_1m, qui est la même droite. 3° Enfin dans le troisième quadrilatère nous trouvons pour la droite qui passe par les milieux des diagonales, Dab_2, et soit :

(*c*) N'' le point de concours des trois droites

$$Da_1m,\ Db_1m,\ Dab_2.$$

Comparant maintenant les lignes (*b*) et (*c*), nous voyons que les deux points N' et N'' sont les mêmes, ou que N'' n'est autre que N', et que de plus :

(*d*) Les quatre droites Dab_2, Da_1b_2, Da_1m, Db_1m, concourent au point N'.

Mais déjà (*a*) les deux droites Dab_2, Da_1b_2, concourent avec Dab_1 en N, donc le point N' n'est autre que le point N, et les cinq droites

$$Dab_1,\ Dab_2,\ Da_1b_2,\ Da_1m,\ Db_1m,$$

concourent au même point N.

Conséquences.

5. 1° Pour l'hexagone circonscrit. En prenant les six côtés d'un hexagone circonscrit quatre à quatre, on forme quinze quadrilatères ; dans chacun d'eux l'on construit la droite qui

passe par le milieu des diagonales; les quinze droites ainsi obtenues concourent en un même point. 2° Pour un polygone circonscrit quelconque de m côtés; dans chacun des $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.}$ quadrilatères que l'on peut former en prenant les m côtés quatre à quatre, l'on mène la droite qui passe par les milieux des diagonales; ces

$$\frac{m(m-1)\,m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$$

droites concourent en un même point, centre de la conique inscrite.

6. Les réciproques sont vraies. Il suffit évidemment de démontrer la vérité de la réciproque pour l'hexagone seulement.

Théorème. Si dans les quinze quadrilatères que forment les six côtés d'un hexagone, les quinze droites qui passent par les milieux des diagonales, concourent en un même point, l'hexagone sera circonscriptible à une conique.

Soit (*fig.* 2) O le centre de la conique inscrite à cinq des six côtés, le côté excepté étant AF. Par le point A menons à cette conique, une tangente Af, que nous supposerons différente de AF; et AB, BE, EF étant trois côtés quelconques du pentagone circonscrit, considérons les deux quadrilatères ABEF et ABEf.

Les deux droites qui passent par les milieux des diagonales de ces deux quadrilatères, doivent par hypothèse et par construction passer : 1° par le centre O de la conique inscrite; 2° par le milieu m de la diagonale AE commune aux deux quadrilatères. Donc, ces deux droites doivent se confondre; ou, ce qui revient au même, la droite mn qui passe par les milieux de AE et de FB devrait diviser la droite AF en deux parties égales; et pour cela il faudrait que mn fût parallèle à FE, ou ce qui revient au même que les deux côtés AB et FE fussent parallèles.

Donc déjà la proposition est démontrée pour le cas où l'hexagone proposé n'a pas deux côtés parallèles séparés par un seul.

En second lieu, s'il existe dans l'hexagone un côté non adjacent à deux côtés parallèles, agissant pour ce côté comme nous venons de le faire pour le côté AF, nous ferions voir que la conique tangente aux cinq autres côtés, est aussi tangente à ce sixième.

Enfin il est facile de voir qu'il n'y a que le parallélogramme circonscrit, dans lequel deux côtés parallèles ne soient séparés que par un seul côté.

Donc, si dans un hexagone, etc..., etc...., l'hexagone sera circonscriptible à une courbe du second degré.

7. Enfin il est clair que de l'hexagone, la proposition réciproque s'étend au polygone de m côtés.

Donc, pour qu'un polygone de m côtés, soit circonscriptible à une courbe du second degré, il faut et il suffit que les droites qui passent par les milieux des diagonales de tous les quadrilatères que l'on peut former avec les m côtés du polygone, concourent toutes au même point, et ce point sera en outre le centre de la conique.