

A. VACHETTE

Note sur les racines égales

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 213-215

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__213_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES RACINES ÉGALES.

PAR A. VACHETTE,

Licencié ès sciences mathématiques, et licencié ès sciences physiques.

1^o Exprimer que $f(x)=0$ a n racines égales.

On a les trois moyens suivants : 1^o exprimer que le quotient de $f(x)$ par $(x-a)^n$ est entier ; 2^o exprimer que $f(x)$, $f'(x)\dots f^{(n-1)}$ ont une racine commune a ; 3^o exprimer que $f(x)$ et $f'(x)$ ont un diviseur commun du degré $n-1$, qui est une puissance exacte $(x-a)^{n-1}$.

Ces trois procédés sont identiques. En effet, remplaçons, dans $f(x)$, x par $a+x-a$, et développons

$$f(a+x-a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\dots n}(x-a)^n + \dots$$

En divisant par $(x-a)^n$, le premier membre devient $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$,
et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{(x-a)^n} &= \frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f''(a)}{1.2(x-a)^{n-2}} + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\dots(n-1)(x-a)} + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\dots n} + \dots \end{aligned}$$

Le second membre devant être un polynôme entier en x , il faut que les termes où x entre en dénominateur disparaissent d'eux-mêmes, c'est-à-dire qu'on ait

$$f(a)=0; f'(a)=0; f''(a)=0 \dots f^{(n-1)}(a)=0,$$

n équations qui contiennent a , et donneront $n-1$ conditions quand on aura éliminé a .

Ce sont les mêmes conditions qu'on trouverait par le second procédé.

Par le troisième procédé, on sait, d'après la formation du dérivé d'un polynôme au moyen des facteurs de ce polynôme, que s'il existe un commun diviseur $(x-a)^{n-1}$ entre $f(x)$ et $f'(x)$, $f(x)$ doit admettre comme diviseur $(x-a)^n$; car $f'(x)$ étant la somme des produits $m-1$ à $m-1$ de $f(x)$, si $f(x)$ n'était pas divisible par $(x-a)^n$, la somme des produits ne pourrait admettre comme diviseur $(x-a)^{n-1}$. En exprimant donc que $f(x)$ est divisible par $(x-a)^n$, on trouve les conditions précédentes; et en exprimant que $f'(x)$ est divisible par $(x-a)^{n-1}$, on les retrouve toutes, excepté la première; en effet :

$$\begin{aligned} f'(a+x-a) &= f'(a) + \frac{f''(a)}{1}(x-a) + \frac{f'''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\dots(n-2)}(x-a)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\dots(n-1)}(x-a)^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

ou bien :

$$\frac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}} = \frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f''(a)}{(x-a)^{n-2}} + \frac{f'''(a)}{1.2(x-a)^{n-3}} + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\dots(n-2)(x-a)} + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\dots(n-1)} + \dots$$

Comme le deuxième membre doit être un polynôme entier en x , on a les conditions -

$$f'(a)=0; \quad f''(a)=0 \dots f^{(n-1)}(a)=0,$$

où il ne manque, pour avoir toutes les précédentes, que la condition $f(a)=0$.

On évite ainsi le paradoxe que M. Gérono avait, à mon avis, suffisamment résolu dans le tome I^{er} des *Annales*. J'ajoute néanmoins que les développements nouveaux qu'il vient de donner dans le tome actuel confirment pleinement sa théorie par des exemples, et font, pour ainsi dire, toucher au doigt la démonstration.

Pour démontrer plus rigoureusement les conclusions qui précèdent, j'observe que le reste de la division de $f(x)$ est

$$\frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f''(a)}{1.2(x-a)^{n-2}} + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\dots(n-1)(x-a)},$$

et doit être nul, quel que soit x ou quel que soit $x - a$; on peut l'écrire

$$\frac{1}{(x-a)^n} \left\{ \begin{aligned} & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \dots + \\ & + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\dots(n-1)}(x-a)^{n-1} \end{aligned} \right\} = 0.$$

C'est alors une identité qui donne les conditions énoncées.