

PAUL SERRET

Nouvelle solution et généralisation de la question 101

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 196-200

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__196_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLE SOLUTION

et généralisation de la question 101.

PAR M. PAUL SERRET,

Élève d'Avignon.

Théorème. Quatre droites situées dans le même plan forment quatre triangles; dans chacun d'eux existe un point de rencontre des trois hauteurs; les quatre points de rencontre sont situés sur une même droite.

1. La démonstration de ce théorème donnée *Nouvelles Annales*, 1846, p. 13, est assez compliquée; la suivante, qui me paraît plus simple, présente en outre, comme nous le verrons, l'avantage de s'appliquer immédiatement au théorème général, démontré analytiquement *Nouvelles Annales*, 1845, p. 530.

Soient (*fig. 40*) ABD, ACE; ODE, OBC les quatre droites données. Par le point C d'intersection des deux droites OBC, ACE, menons CF parallèle à ABD, qui rencontre la droite ODE au point F, de sorte que l'on a :

$$(1) \quad FD : FE :: AC : CE.$$

Soient d, f, e, a les projections sur OBC des points D, F, E, A. Soient de plus m, n, p , et M les points de rencontre

des hauteurs dans les trois triangles ODB, ABC, OCE, et dans le triangle auxiliaire OCF.

Cela posé, pour prouver, par exemple, que les trois points m, n, p sont en ligne droite, comme par construction la ligne MCp est droite, et que de plus les droites Mm et Cn sont parallèles, il suffit de faire voir que l'on a :

$$Mm : Cn :: Mp : Cp; \quad (2)$$

ou bien, en prenant les projections de ces longueurs sur OBC, que l'on a :

$$df : Ca :: fe : Ce,$$

ou bien

$$fd : fe :: Ca : Ce,$$

ou bien

$$FD : FE :: CA : CE,$$

ce qui est précisément la relation de construction (1). Donc on a bien la relation (2); donc les trois points m, n, p sont en ligne droite. On verrait d'une façon analogue que les trois points m, n, l sont en ligne droite. Donc les quatre points sont sur une même droite.

2° *Théorème.* Si deux des quatre droites sont anti-parallèles par rapport à l'angle formé par les deux autres, 1° la distance des points de rencontre des deux triangles partiels sera égale à la distance des points de rencontre des deux triangles qui les comprennent; 2° les distances des points de rencontre de chacun des grands triangles aux points de rencontre des triangles non compris sont égales.

Ainsi l'on aura : $mn = lp$ et $ml = np$.

Par hypothèse l'on a, BC et DE étant anti-parallèles dans le triangle DAE : $\text{angle } B = \text{angle } E$; $\text{angle } C = \text{angle } D$, et de plus

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \quad (a)$$

Il en résulte immédiatement, comme il est facile de le voir, que BD et CE sont aussi anti-parallèles par rapport à l'angle DOB, et que l'on a :

ang B = ang E ; ang (2dr — C) = ang(2dr — D), et de plus

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OC}{OD}. \quad (b)$$

Soient ω, b, d les projections sur ACE des points O, B, D ; c, d, ϵ , les projections sur OE, de C, A, B ; ϵ, ω, γ , les projections sur ABD de E, O, C.

Cela posé, je dis d'abord qu'on aura la proportion

$$pn : nm :: ml : pl. \quad (1)$$

On trouve en effet :

$$pn : nm :: ae : ad :: AE. \cos C : AD. \cos B ;$$

de même

$$ml : pl :: d\epsilon : cd :: AB. \cos D : CA. \cos E ;$$

donc, pour que la relation (1) existe, il faut et il suffit que

$$\frac{AE. \cos E}{AB. \cos B} = \frac{AD. \cos D}{AC. \cos C}, \text{ égalité qui existe en vertu des relations (a). De même je dis qu'on aura :}$$

$$ml : mn :: np : lp, \quad (2)$$

et on a :

$$ml : mn :: \epsilon\omega' : \omega'\gamma :: EO. \cos D : CO. \cos B$$

$$np : lp :: b\omega : \delta\omega :: OB. \cos CO : D. \cos E ;$$

donc, pour que la relation (2) existe, il faut et il suffit que

$$\frac{OE. \cos E}{OB. \cos B} = \frac{OC. \cos C}{OD. \cos D}, \text{ égalité qui existe en vertu des relations (b); donc on a en même temps les proportions (1) et (2); or, 1° en les multipliant terme à terme on a :}$$

$$ml. pn : \overline{mn}^2 :: ml. pn : \overline{pl}^2,$$

donc

$$\overline{mn}^2 = \overline{pl}^2, \text{ ou } mn = pl.$$

En divisant (1) et (2) terme à terme on a :

$$\frac{pn}{ml} : 1 :: \frac{ml}{np} : 1,$$

d'où $\frac{pn}{ml} = \frac{ml}{np}$, d'où $pn = ml$.

Or les deux égalités $mn = pl$, et $ml = np$ démontrent le théorème qui fait l'objet de ce paragraphe.

3. *Lemme.* Un triangle étant inscrit à une conique, les trois droites conjuguées aux trois côtés et passant respectivement par les sommets opposés concourent en un même point.

Cette proposition, démontrée analytiquement (*Nouvelles Annales*, 1845, p. 432), peut se démontrer géométriquement, ainsi qu'il suit :

Les trois droites conjuguées aux trois côtés et passant par les milieux de ces côtés, concourent en un même point, centre de la conique; donc, comme on pourrait facilement le démontrer, les trois parallèles menées par les sommets opposés, concourront en un même point.

4. La démonstration du paragraphe 1 suppose essentiellement et seulement 1° que dans chaque triangle les trois droites menées par les trois sommets concourent en un même point; 2° que dans chaque triangle la direction de la transversale menée par un sommet quelconque dépend *uniquement* de la direction du côté opposé, de sorte que dans deux triangles tels que ODB, BAC qui ont leurs bases sur la même droite, les transversales menées par les sommets D et A opposés à la base commune soient parallèles.

En effet, cela étant, on verra comme précédemment, paragraphe 1, 1° que la ligne MCp est droite, 2° que les droites Mm , Cn sont parallèles, et que leurs longueurs sont entre elles comme leurs projections df , aC , faites suivant les parallèles Dd , Ff et na sur la droite OBC, et ainsi de suite...

Par conséquent, toutes les proportions précédemment établies subsisteront encore et conduiront au même résultat.

Donc, d'après le lemme 3, la démonstration du paragraphe 1 est exactement applicable au théorème général suivant :

Théorème. Un quadrilatère étant tracé dans le plan d'une conique, si l'on prolonge suffisamment les côtés opposés, on obtient quatre triangles ; dans chacun d'eux existe un point de rencontre des trois droites conjuguées aux trois côtés et passant par les sommets opposés ; ces quatre points sont en ligne droite.