

CHARLES SOULÉ

**De la diacaustique dans le cas d'une
surface réfractante plane**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 186-194

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__186_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DE LA DIACAUSTIQUE

dans le cas d'une surface réfractante plane.

PAR M. SOULÉ (CHARLES),

Élève à l'institution Barbet.

Soient deux milieux P, P' séparés par la surface plane OK, et considérons la réfraction des rayons lumineux partis du point P, dans un plan perpendiculaire à cette surface de séparation. Proposons-nous de déterminer l'enveloppe des rayons réfractés tels que KN (*fig. 34*). Nous traiterons d'abord la question par la géométrie. Pour cela, démontrons un théorème préliminaire sur les coniques à centre.

I (*fig. 35*). Par exemple, MN étant une normale à l'ellipse, si l'on joint sa trace K sur l'axe des y au foyer F, on aura $KFF' = F'MK$, ou bien, comme il est démontré que $\frac{\sin F'MK}{\sin F'NK} = \frac{c}{a}$, il s'agit de prouver que $\frac{\sin KFF'}{\sin F'NK} = \frac{c}{a}$. Sur F'F décrivons le segment capable de l'angle F'MF. Le point K étant le milieu de l'arc F'KF, KM sera bissectrice de F'MF, et, par suite, sera précisément la normale MN.

Alors les angles KFF' et F'MK ayant même mesure $\frac{KF'}{2}$ égaux.

On démontre facilement le même théorème par le calcul. En effet,

$$\begin{aligned} \text{tang KFF}' &= -\frac{-c^2 y'}{b^3} = \frac{cy'}{b^2}; \quad \sin KFF' = \frac{cy'}{\sqrt{b^4 + c^2 y'^2}}; \\ \text{tang KNF}' &= \frac{a'^2 y'}{b^3 x'}; \quad \sin KNF' = \frac{a^2 y'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}} = \\ &= \frac{ay'}{\sqrt{b^4 + c^2 y'^2}}; \end{aligned}$$

Donc
$$\frac{\sin \text{KFF}'}{\sin \text{KNF}'} = \frac{c}{a}.$$

Réciproquement, toutes les fois que cette égalité aura lieu, la ligne KNM sera normale à l'ellipse; car, il n'y a qu'une ligne KN qui puisse faire avec OX un angle aigu KNO, dont le sinus ait avec celui de l'angle donné KFO un rapport donné $\frac{c}{a}$.

II. Même théorème pour l'hyperbole.

III. Cela posé (*fig. 34*), soit un rayon incident PK et KN le rayon réfracté, en appelant n le rapport des vitesses de la lumière dans le milieu P' et dans le milieu P, nous aurons
$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Soit $n < 1$, et construisons une ellipse ayant O pour centre, P pour foyer, $\frac{c}{a} = n$ pour rapport de son excentricité à son grand axe. Nous aurons $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{a}$, et, d'après le théorème précédent, tout rayon réfracté sera normal à cette ellipse. L'enveloppe des rayons réfractés, ou la caustique, ne sera donc autre chose que celle des normales ou la développée de l'ellipse.

Si $n > 1$, nous construirons une hyperbole d'après les mêmes données. Notre enveloppée sera, de même, la développée de l'hyperbole.

Cherchons l'équation de ces courbes en fonction des données n et $OP=c$:

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2) x^2 = a^2 (a^2 - c^2),$$

$$n = \frac{c}{a}, a = \frac{c}{n}, \frac{c^2}{n^2} y^2 + \left(\frac{c^2}{n^2} - c^2 \right) x^2 = \frac{c^2}{n^2} \left(\frac{c^2}{n^2} - c^2 \right).$$

$n^2y^2+n^2(1-n^2)x^2=c^2(1-n^2)$ qui sera une hyperbole ou une ellipse, suivant que n sera $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 1$.

Traisons la question par le calcul.

IV. Cherchons l'enveloppe des droites $ay+bx-ab=0$ (1), a et b étant liés par la relation $\frac{KN}{KP} = n = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c'^2+b^2}}$, ou (2) $a^2+(1-n^2)b^2=c'^2n^2$. Désignons, pour abrégé, $1-n^2$ par k . Différentions chacune de ces équations, b étant fonction de a :

$$y+x\frac{db}{da}-a\frac{db}{da}-b=0; \quad a+k\frac{db}{da}=0.$$

Egalons les dérivées $\frac{db}{da}$, il vient $a(a-x)-b^2k+bky=0$. (3)

Il faut éliminer a et b entre les équations (1), (2), (3).

Pour cela, de (1) nous tirons (4) $b = \frac{ay}{a-x}$; substituant dans (3)

$$a-x - \frac{aky^2}{(a-x)^2} + \frac{ky^2}{a-x} = 0; \quad a = x + (kxy^2)^{\frac{1}{3}};$$

$$a^2 = x^2 \left(x^{\frac{2}{3}} + k^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \right)^2;$$

substituant dans (4),

$$b = \frac{x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} + k^{\frac{1}{3}} y}{k^{\frac{1}{3}}}; \quad b^2 = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}} \left(x^{\frac{2}{3}} + k^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \right)^2;$$

substituant dans (2), et remarquant que nous avons le cube de $x^{\frac{2}{3}} + k^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$, il vient pour équation du lieu :

$$(5) \quad (1-n^2)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} c'^{\frac{2}{3}},$$

équation des développées des sections coniques à centre, ellipse ou hyperbole suivant que $1-n^2$ sera $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$.

Pour avoir l'équation de ces sections $a^2y^2 + (a^2-c^2)x^2 = a^2(a^2-c^2)$, identifions l'équation (5) à celle de leurs développées :

$$a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + (a^2-c^2)^{\frac{1}{3}} y^3 = c^{\frac{4}{3}},$$

nous aurons :

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{(a^2-c^2)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} = \frac{(1-n^2)^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}}};$$

ou

$$\frac{a}{c^2} = \frac{1}{nc'}, \quad \frac{a^2-c^2}{c^4} = \frac{1-n^2}{n^2c'^2}.$$

On tire de là $c' = c$, $a = \frac{c}{n}$, et, par suite, l'équation des courbes :

$$n^2y^2 + n^2(1-n^2)x^2 = c^2(1-n^2).$$

Note. Si d'un point A pris sur une surface, on va vers un autre point A', les deux normales à la surface ne sont pas dans un même plan, généralement parlant, et la plus courte distance DD' des deux normales divisée par la longueur de AA' donne un quotient fini, lors même que l'arc AA' est infiniment petit. Euler a démontré qu'il existe pour chaque point A deux directions rectangulaires pour lesquelles le rapport $\frac{DD'}{AA'}$ devient nul, c'est-à-dire où la distance DD' est un infiniment petit du second ordre relativement à l'arc AA'. C'est là l'origine des lignes de courbure, une des plus belles découvertes de l'illustre créateur de la géométrie des surfaces; tout ce qu'on a fait depuis ne sont que des conséquences médiatees ou immédiates des théories eulériennes (Mém. de

Berlin . 1760, en français) Monge a généralisé cette idée d'Euler et a établi que si par deux points A et A' infiniment voisins, on mène deux droites soumises à la même loi de construction, il existe toujours une direction AA' pour laquelle le rapport $\frac{DD'}{AA}$ est nul. Malus s'est élevé encore à une plus vaste généralisation : il considère un premier système de droites rencontrant une surface donnée ; de chaque point de rencontre part une droite liée à la première par une loi donnée ; on obtient ainsi un second système. A l'aide d'une analyse très-belle, mais assez compliquée, Malus découvre des relations, devenues célèbres, entre les deux systèmes, relations que M. Dupin a obtenues ensuite plus simplement, par des considérations géométriques. C'est même la grande utilité de la géométrie, d'éclairer des théories qu'elle n'a pas fondées, d'abrèger la voie aux découvertes qu'elle n'a pas faites. Ces relations que nous venons de mentionner renferment la question optique comme cas particulier. En effet, le premier système peut représenter des rayons incidents, et le second système les rayons réfractés, qui comprennent aussi les rayons réfléchis en prenant l'indice de réfraction égal à —1. Depuis, M. Quetelet a eu l'heureuse idée de considérer les deux surfaces trajectrices qui coupent orthogonalement les deux systèmes de droites d'incidence et de réfraction : grand moyen de simplification, car les développantes sont souvent de degrés moins élevés que les développées. On en a un exemple dans les coniques, courbes du second degré, qui ont pour développées des lignes du sixième degré. M. Quetelet a énoncé à ce sujet des théorèmes que M. Timmermans, de Gand, a démontrés d'une manière tellement élémentaire, que nous pouvons les consigner dans ce recueil.

Soient deux droites MA, NA se coupant au point A ; le

Lieu géométrique d'un point dont le rapport des distances aux deux droites est constant, est formé par le système de deux droites passant aussi par A et relatives aux deux angles aigus et aux deux angles obtus. Considérons une de ces droites que nous désignons par AP; prenant donc un point I sur cette droite, et abaissant sur les droites AM, AN les perpendiculaires IR, IS, on aura :

$$\frac{IR}{IS} = \frac{\sin MAP}{\sin NAP} = \frac{\sin i}{\sin r} = n = \text{constante.}$$

Si par le même point I nous élevons une perpendiculaire IT à AP, on a évidemment aussi :

$$\frac{\sin RIT}{\sin SIT} = \frac{\sin i}{\sin r} = n;$$

en regardant donc AP comme une droite *dirimante* de deux milieux, IR étant un rayon incident, IS sera le rayon réfracté, si n est l'indice de réfraction.

Cela posé, soient maintenant AM, A''N deux courbes quelconques situées dans le même plan. Le point dont le rapport des distances normales à ces deux courbes est constant, sera une troisième courbe A'P, et telle que si par un point I de cette courbe nous menons les deux normales IR, IS, les trois tangentes menées en R, I, S, respectivement aux courbes AM, A'P, A''N, se couperont en un même point. C'est une conséquence immédiate de ce qui a été dit ci dessus. Si donc la courbe A'P est une ligne *dirimante* entre deux milieux, et si AM représente une trajectoire orthogonale des rayons incidents, il est évident que la courbe A''N sera une trajectoire orthogonale des rayons réfractés, si l'on a $\frac{IR}{IS} = n =$ indice de réfraction; trajectoire que M. Quetelet désigne sous le nom de *caustique secondaire*, et qui n'est

autre que l'enveloppe d'un cercle dont le centre parcourt la ligne dirimante et dont le rayon IS est égal à $n \cdot IR$. On sait d'ailleurs qu'il existe une infinité de trajectoires orthogonales; quand on en adopte une pour les rayons incidents, celle des rayons réfractés est déterminée, et les développées de cette dernière trajectoire ou caustique *secondaire*, est la caustique cherchée (*Corresp. math.*, t. I, p. 336). Lorsque l'objet lumineux se réduit à un point, la trajectoire orthogonale des rayons incidents est un cercle de rayons arbitraires qu'il est naturel de prendre égal à zéro. C'est ce qu'on a fait dans le problème précédent sur la *droite dirimante*. Du reste, ce problème a été souvent résolu, entre autres analytiquement par M. Gergonne, et ensuite géométriquement par M. Sturm; les solutions de M. Soulé semblent plus simples.

Les *Nouvelles Annales* contiennent l'équation générale des *caustiques secondaires* par réflexion des coniques, les rayons émanant d'un point. Cette courbe est celle qu'on obtient en abaissant du point lumineux une perpendiculaire sur la tangente à la conique et prolongeant cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même (*Nouvelles Annales*, t. IV, p. 426). Je ne sais pas qu'on ait jamais calculé cette équation avec cette généralité. Ce genre de courbe est aussi donné par l'équation bifocale $pz + qz' = \nu$; z et z' sont les distances d'un point quelconque de la courbe à deux foyers fixes, et p , q , ν , des constantes. C'est ce que M. Sturm a démontré pour le cas particulier du cercle.

Tschirnhausen (Walther de) est l'inventeur des caustiques catoptriques. Il a indiqué, sans démonstration, la caustique du cercle pour des rayons incidents parallèles (*Acta erud.*, nov. 1682, p. 364); mais J. Bernoulli a démontré que l'indication de Tschirnhausen était fautive, et a donné, dans des leçons sur le calcul intégral à l'usage du marquis de L'hospital (1691 et 1692), la première théorie analytique et géomé-

trique des caustiques catoptriques et dioptriques pour des rayons parallèles et convergents, mais toujours dans un même plan (*Opera omnia*, t. III).

Nous croyons utile de consigner ici les principaux travaux sur les caustiques publiés dans ces derniers temps.

Journal de l'École Polytechnique.

Malus. Mémoire sur l'optique, cahier XIV, p. 1-44, 1808; sur la dioptrique, p. 84-129.

Correspondance sur l'École Polytechnique.

Malus. Surfaces caustiques, t. I, p. 142-144, 1808.

Petit. Moyens de construire par points les caustiques par réflexion ou par réfraction dans le cas des surfaces sphériques, t. II, p. 353-358. 1812.

Annales des Mathématiques (Gergonne).

Gergonne. De la manière dont les poissons nous voient et dont nous les voyons, t. XI, p. 41-69, 1820-21.

Gergonne. Recherches analytiques des propriétés les plus générales des faisceaux lumineux directs, réfléchis et réfractés, t. XIV, p. 129-187, 1823.

Sturm. Recherches sur les caustiques par réflexion et réfraction dans le cercle, t. XV, p. 205-219, 1825.

Gergonne, Sarrus, Quetelet. Sur les caustiques, t. XV, p. 345-358.

Gergonne. Recherches d'analyse sur les surfaces caustiques, t. XV, p. 1-19.

Gergonne. Théorème sur les surfaces caustiques, t. XV, p. 65-80, 247-254.

Gergonne. Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques, et historique des recherches sur les caustiques, t. XV, p. 307-315.

Saint-Laurent (Thomas de). Recherches sur la caustique par réflexion dans le cercle , t. XVII , p. 1-33.

Saint-Laurent (Thom. de). Recherches sur la caustique formée au fond d'une tasse cylindrique, t. XVII, p. 33-35, 1827.

Saint-Laurent (Thomas de). Équation générale de la caustique par réflexion dans le cercle, t. XVII, p. 128-134.

Saint-Laurent (Thomas de). Recherches sur la caustique par réfraction dans le cercle, t. XVIII, p. 1-19, 1827.

Gergonne. De la caustique par réfraction dans le cercle, t. XVIII, p. 48-56.

Correspondance mathématique.

Tome I, 1828.

Quetelet. Énoncé d'un théorème général sur les caustiques, p. 14.

J. G. G. Notice historique sur les caustiques, p. 29.

Quetelet. Énoncé de quelques théorèmes nouveaux sur les caustiques, p. 147.

Gergonne. Extrait d'une lettre au rédacteur, p. 149 et 268.

• **A. Timmermans.** Sur les caustiques secondaires, p. 336.

Tome VII, 1832.

Plana. Mémoires sur les caustiques, p. 13.

Plana. Suite, p. 85.

Tome VIII, 1835.

Hamilton. Remarques sur le mémoire de M. Plana, p. 27.

1822. **Dupin.** Applications de géométrie. Routes de la lumière, p. 185.