

MURENT

Solution de la question 143

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 176-178

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__176_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 143. (Page 134.)

PAR M. MURENT (de Clermont-Ferrand).

Problème. Connaissant un point et le centre d'une hyperbole équilatère, trouver le lieu du sommet et du foyer.

1° *Lieu du sommet.* Soient C et M (*fig.* 37) le centre et le

point donnés; tirons par ces deux points une droite indéfinie et faisons $CM=d$. Soit CX l'axe transversé de l'hyperbole dans l'une de ses positions; en menant, de part et d'autre de cet axe, deux droites CA , CB qui fassent avec lui des angles de 45° , ces deux droites seront perpendiculaires entre elles et seront les asymptotes de l'hyperbole équilatère que nous considérons. Si le point S est le sommet de cette hyperbole, en tirant la droite MS et la prolongeant, on aura, d'après une propriété connue de cette courbe, $BS=MA$; réciproquement, si, par le point M , on mène la transversale $AMSB$ telle que $BS=MA$, le point S sera le sommet de l'hyperbole; car à cause de cette égalité, il est un point de la courbe, et puisqu'il se trouve sur l'axe transverse, il en est le sommet. Abaissons maintenant MP perpendiculaire sur CA et remarquons que la direction de la transversale AB serait déterminée si l'on connaissait la longueur PA .

Or, de l'égalité $BS=MA$ il résulte que si l'on abaisse encore SQ perpendiculaire sur CB , les triangles rectangles SBQ , AMP seront égaux. Ainsi QS sera égale et parallèle à PA : donc en tirant PQ , cette ligne sera parallèle à AB . Cela posé, les triangles semblables MPA , QCP donnent la proportion

$$MP : PA :: QC : CP.$$

Mais dans le triangle-rectangle isocèle CQS , on a $CQ=QS=PA$. La proportion devient donc

$$MP : PA :: PA : CP,$$

d'où

$$\overline{PA}^2 = MP \cdot CP.$$

Il est facile maintenant d'avoir l'équation polaire du lieu. Pour cela prenons C pour pôle et CMx pour axe polaire: le triangle CQS donne

$$\overline{CS}^2 = 2\overline{SQ}^2 = 2\overline{PA}^2,$$

et en remplaçant \overline{PA}^2 par $MP \cdot CP \dots \overline{CS}^2 = 2MP \cdot CP$ (1)

Faisant $CS = \rho$ et l'angle $SCM = \omega$ et observant que dans le triangle-rectangle MPC, on a

$$MP = CM \sin MCP = d \sin(45^\circ - \omega)$$

$$CP = CM \cos MCP = d \cos(45^\circ - \omega),$$

on mettra ces valeurs dans l'égalité (1) et l'on aura

$$\rho^2 = d^2 \cdot 2 \sin(45^\circ - \omega) \cos(45^\circ - \omega) = d^2 \cdot \sin(90^\circ - 2\omega) = d^2 \cos 2\omega,$$

d'où

$$\rho = \pm d \sqrt{\cos 2\omega},$$

équation d'une lemniscate de Bernouilli ayant pour centre le point C et pour demi-axe la longueur donnée $CM = d$.

2° *Lieu du foyer*. Soit F le foyer de l'hyperbole dont S est le sommet, faisons $CF = \rho'$.

On sait que dans l'hyperbole équilatère, la valeur de la demi-excentricité est $c = a\sqrt{2}$, a étant le demi-axe transverse; donc ici on aura $\rho' = \rho\sqrt{2}$, ou en remplaçant ρ par la valeur ci-dessus, on aura pour l'équation du lieu du foyer

$$\rho' = \pm d \sqrt{2 \cos 2\omega}.$$

C'est une seconde lemniscate qui enveloppe la première et qui a pour centre le point C et pour demi-axe la longueur $CN = d\sqrt{2}$.

3. Ces deux courbes sont semblables et semblablement placées, et si l'on construit l'une d'elles par points (t. IV, p. 145), on pourra en déduire la seconde par la relation $\rho' = \rho\sqrt{2}$.