NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Démonstration d'un second théorème de M. Chasles sur les rayons vecteurs et les polaires des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 162-164

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__162_1>

DÉMONSTRATION

d'un second théorème de M. Chasles *sur les rayons vecteurs et les polaires des coniques.*

Théorème. Étant donné un point dans le plan d'une conique avec sa polaire par rapport à cette conique, si l'on mène par le point une corde quelconque, et des rayons vec-

(*) Cela n'est pas exact. Il peut y avoir plusieurs points symétriquement placés par rapport à CP teurs du même foyer aux extrémités de la corde, la somme *algébrique* que l'on obtient en divisant chaque rayon vecteur respectivement par la distance de l'extrémité de la corde à la polaire est constante.

Démonstration. (*Fig.* 28). Soit, pour fixer les idées, une ellipse MNK; O un point fixe; MON une corde quelconque; M'N' la polaire; MM', OO', NN' des perpendiculaires abaissées sur la polaire; M''N'' une droite quelconque, non parallèle à la polaire et la coupant en V; MM'', OO'', NN'' des perpendiculaires abaissées sur la droite quelconque.

Par I, point de rencontre de la corde et de la polaire, menons une parallèle IPQR à la droite M''N''. Les quatre points I, M, O, N, d'après une propriété connue, sont disposés harmoniquement; c'est-à-dire, IO est une moyenne harmonique entre IM et IN; donc aussi OO' est une moyenne harmonique entre MM' et NN'. On a donc :

$$\frac{1}{MM'} + \frac{1}{NN'} = \frac{2}{OO'}; \qquad (1)$$

de plus,

$$\frac{MM''}{MM'} = \frac{MP}{MM'} + \frac{QO''}{MM'}; \quad \frac{NN''}{NN'} = \frac{NR}{NN'} + \frac{QO''}{NN'};$$

ajoutant

$$\frac{MM''}{MM'} + \frac{NN''}{NN'} = \frac{2OQ}{OO'} + \frac{2QO''}{OO'} = \frac{2.OO''}{OO'} = \text{quantité constante.}$$

Si la droite quelconque est une directrice, MM'' et NN'' peuvent être remplacés par les rayons vecteurs correspondants; donc le théorème est démontré.

Observations.

I. La somme est *algébrique*; selon la position des perpendiculaires par rapport aux droites, cette somme peut devenir une différence.

II. Lorsque la corde MN ou la droite N″M″ est parallèle à la polaire, il faut un autre moyen de démonstration, qui est d'une facilité intuitive.

III. Le même théorème et le même moyen démonstratif subsistent pour une surface du second degré de révolution ; la polaire et la droite quelconque sont remplacées par le plan polaire et un plan quelconque.

IV. Lorsque la droite VN″ passe par le point O, alors OO″ est nul, MM″ et NN″ deviennent proportionnels à OM et ON, et l'on a ce théorème :

Si par un point pris dans le plan d'une conique, on mène une corde, la distance d'une extrémité de la corde au point, divisée par sa distance à la polaire du point, est égale au quotient analogue pour l'autre extrémité de la corde (*).

V. Deux droites dans un plan représentent une conique ; en y appliquant le théorème, on obtient une propriété de géométrie élémentaire. Tm.
