

DROUETS

Concours de mathématiques spéciales, 1846

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 159-162

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__159_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONCOURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, 1846.

PAR M. DROUETS,

Élève à l'École de la Flèche (*).

Étant donnée une ellipse, si on lui circonscrit des rectangles tels que ABCD, on sait que tous les sommets sont situés sur un même cercle concentrique à l'ellipse (fig. 29).

Cela étant admis, des points de contact N et Q de deux côtés opposés du rectangle, on mène deux droites au point de contact M, de l'un des deux autres côtés, l'on demande de prouver 1° que ces deux droites MN, MQ sont également inclinées sur le côté AB; 2° que leur somme MN et MQ est constante; 3° que les côtés MN, MQ enveloppent une ellipse confocale à la première.

Les tangentes BD, AC étant parallèles, la ligne NQ est un diamètre; les cordes NM, MQ sont des cordes supplémentaires, donc elles sont parallèles à un système de diamètres conjugués, c'est-à-dire que si par le centre O on leur mène des parallèles, ces droites formeront un système de diamètres conjugués. Mais on sait encore que si aux points M et N on mène des tangentes à l'ellipse, elles concourent en un point B du conjugué de MN, donc OB et OA sont respectivement parallèles à MQ et MN. Or, A et B sont sur une circonférence ayant pour centre O, donc $OA=OB$; les angles OBA, OAB sont égaux; mais à cause des parallèles, $QMA=OBA$; $NMB=OAB$ donc 1° $QMA=NMB$. On sait

(*) Aujourd'hui élève à l'École polytechnique.

aussi que les deux points A, P sont réciproques ainsi que R et B; donc $OA \cdot OP = A^2$ carré du diamètre compté sur cette direction; $OB \cdot OR = B^2$ carré du diamètre conjugué; $OA = OB$, $OP + OR = \frac{1}{2} (MN + MQ) = \frac{1}{2} \frac{A^2 + B^2}{OA}$; or, $A^2 + B^2$ est égale à la somme des carrés des demi-axes de l'ellipse a, b et le rayon $OA^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc (2°)

$$MN + NQ = 2 \sqrt{a^2 + b^2} = \text{le diamètre du cercle OA.}$$

Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque du cercle par rapport aux axes principaux.

L'équation de la corde de contact des tangentes menées par ce point est

$$(1) \quad a^2 \beta y + b^2 \alpha x = a^2 b^2 \quad (2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2.$$

On demande l'enveloppe de cette droite.

D'après la théorie générale, j'aurai (en désignant par β' la dérivée de β en α) à éliminer α, β, β' entre les équations (1), (2), (3), (4).

$$(3) \quad a^2 \beta' y + b^2 x = 0 \quad (4) \quad \alpha + \beta' \beta = 0 \quad \text{d'où} \quad \beta' = -\frac{\alpha}{\beta},$$

(3) $a^2 \alpha y - b^2 \beta x = 0$, $\alpha = \frac{b^2 \beta x}{a^2 y}$ substituant dans (1): il vient

$$\beta = \frac{a^4 b^2 y}{a^4 y^2 + b^4 x^2}, \text{ donc } \alpha = \frac{a^2 b^4 x}{a^4 y^2 + b^4 x^2},$$

substituant dans (2), il vient pour équation du lieu

$$a^2 b^4 y^2 + b^2 a^4 x^2 = (a^2 + b^2) (a^4 y^2 + b^4 x^2)^2$$

ou bien mettant en dehors $a^4 y^2 + b^4 x^2$ facteur commun qui donne pour solution le centre $x = 0, y = 0$, il restera :

$$a^4 y^2 + b^4 x^2 = \frac{a^4 b^4}{a^2 + b^2}$$

ellipse concentrique à la première. Les axes A, B de cette ellipse ont pour carrés :

$$A^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}, B^2 = \frac{b^4}{a^2 + b^2}; A^2 - B^2 = C^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2} = a^2 - b^2 = c^2$$

donc ces deux ellipses sont confocales.

Voici quelques mots de la théorie des enveloppes qui suffisent pour justifier les équations que j'ai employées.

Soit $F(x, y, a) = 0$ l'équation d'une courbe plane dans laquelle a est une variable ; on demande le lieu des intersections successives de cette courbe. Je donne à a une valeur infiniment voisine $a + h$, et j'ai une seconde courbe $F(x, y, a + h) = 0$ qui donne des intersections avec la première : on demande ce qu'elles deviennent quand h converge vers 0.

$$F(a + h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{1.2} F''a + \dots = 0, \text{ or } Fa = 0 \text{ donc}$$

$$\left[F'a + \frac{h}{1.2} F''a + \dots \right] = 0; \text{ à la limite } h = 0, \text{ donc } F'a = 0.$$

Il faut donc éliminer a entre $Fa = 0$ et $F'a = 0$ et on a l'équation en x, y . S'il y a plus d'une variable, comme dans l'exemple ci-dessus, on peut supposer que toutes ces variables dépendent de l'une d'elles, d'après les conditions de l'énoncé, et qu'on les ait remplacées par ces valeurs, alors il n'y aura plus qu'une variable, et on pourra appliquer la règle précédente.

Concours d'élémentaires, 1846.

Etant donné, dans un plan, un cercle et une droite AB qui ne rencontre pas le cercle ; de chaque point M de la droite, on mène deux tangentes au cercle, et on joint les points de contact par une corde qui, prolongée, va rencontrer AB en un point M'. On a donc pour chaque point M un segment MM' :

on demande s'il y a dans le plan un point O d'où l'on voie sous un angle droit tous ces segments : on demande ensuite s'il y en a hors du plan et enfin s'il y en aura quand la droite rencontre le cercle (fig. 30).

D'abord, si un tel point existe, il est sur la ligne CP perpendiculaire à AB ; car cette droite divise le cercle et AB en parties qui jouissent absolument des mêmes propriétés (*).

Soit M un point de AB je fais les constructions indiquées : soit O le point cherché, l'angle MOM' étant supposé droit, le triangle rectangle de même nom donnera $OP^2 = MP \cdot PM'$.

Les triangles rectangles MCP , DPM' semblables donneront $MP : CP :: DP : PM'$; donc $MP \cdot PM' = CP \cdot DP = OP^2$.

Or, D est le pôle de la droite AB ; donc $CP \cdot DP = CP^2 - CQ^2 =$ quantité constante ; donc PO est constant et le point O est fixe. Si PO tourne autour de AB comme axe, le point O décrit une circonférence, telle que de chacune de ses points, on voit le segment MM' sous un angle droit.

Si la droite AB coupe le cercle $CP^2 - CQ^2$ devient négatif et PO devient imaginaire (fig. 31).