

RISPAL

Problème 134

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 10-14

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__10_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME 134 (t. V, p. 671).

La surface d'un cylindre oblique à base circulaire, est équivalente à celle d'un rectangle, dont un côté serait le diamètre du cercle, et l'autre côté la circonférence d'une ellipse ayant pour axes la hauteur et l'arête du cylindre.

(BRINKLEY).

PAR M. HISPAL,
élève de l'École normale.

Fig. 3. Faisons passer par l'axe du cylindre un plan $OoKM$

perpendiculaire à celui de sa base. Soit Oo' l'axe = a ; soit h la hauteur, considérons un élément du cylindre compris entre deux arêtes $m\mu$, $m'\mu'$.

Son aire sera :

$$\begin{aligned} mm' &\times m\mu \sin \mu mm' \\ mm' &= ds; \quad m\mu = a, \end{aligned}$$

donc l'aire du parallélogramme élémentaire est

$$ads \times \sin \mu mm'.$$

Menons la droite mR tangente au cercle, elle est la trace du plan tangent sur le plan de la base. Menons mL parallèle à OM ; nous aurons un trièdre dont les trois arêtes sont $m\mu$, mL , mR rectangle en mL ; et en supposant une sphère décrite de m comme centre, on obtient un triangle sphérique dans lequel

$$\cos \mu mm' = \cos \mu mL \times \cos LmR;$$

or

$$\sin \mu mL = \frac{h}{a}, \quad \cos LmR = \frac{dx}{ds};$$

par conséquent l'aire du parallélogramme élémentaire a pour expression :

$$ads \sqrt{1 - \frac{a^2 - h^2}{a^2} \cdot \frac{dx^2}{ds^2}} = \sqrt{a^2 ds^2 - (a^2 - h^2) dx^2};$$

mais dans le cercle de base $ds = \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Par conséquent cette expression devient :

$$dx \sqrt{\frac{a^2 r^2}{r^2 - x^2} - (a^2 - h^2)} = dx \sqrt{\frac{r^2 h^2 + (a^2 - h^2) x^2}{r^2 - x^2}};$$

posons $x = r \sin \varphi$, d'où $dx = r \cos \varphi$, et elle devient,

$$\begin{aligned} rd\varphi \cos \varphi \sqrt{\frac{r^2 h^2 + (a^2 - h^2) r^2 \sin^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi}} &= \\ &= rd\varphi \sqrt{h^2 + (a^2 - h^2) \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Si on intègre cette expression depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$ et qu'on double l'intégrale, on aura l'aire cherchée

$$\begin{aligned}
 A &= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{h^2 + (a^2 - h^2) \sin^2 \varphi} = \\
 &= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{a^2 - (a^2 - h^2) \cos^2 \varphi}.
 \end{aligned}$$

Or l'intégrale représente précisément le périmètre d'une ellipse dont les axes seraient a et h : donc le théorème est démontré.

Note. On a la proportion $\frac{h}{a} = \frac{2r \sin \alpha}{2r}$; donc l'ellipse qui a pour axes h et a , est semblable à l'ellipse qui a pour axes $2r \sin \alpha$ et $2r$, à l'ellipse *arc droit* ; leurs périmètres sont donc dans le rapport de $2r : a$; donc le théorème est démontré. Tm.

On peut arriver au même résultat, de la manière suivante :

Considérons, *fig. 4*, toujours le plan qui passe par l'axe du cylindre, et est perpendiculaire au plan de la base.

Par les points B et B', menons deux plans perpendiculaires à l'axe ; ils couperont, l'un le cylindre, et l'autre le prolongement du cylindre, suivant deux ellipses égales et parallèles ; et il est aisé de voir que la figure ABC a la même surface que la figure A'B'C' ; donc le cylindre de BC et de hauteur BB', a la même surface que le cylindre proposé ; or ce dernier cylindre a pour mesure

$$\text{Périm. BC} \times \text{BB}' ;$$

donc aussi le cylindre proposé a la même mesure.

Ainsi l'aire est égale à celle d'un rectangle, qui aurait pour hauteur la génératrice a du cylindre, et pour base le périmètre d'une ellipse, dont les axes sont :

$$2r \text{ et } 2r \sin \alpha.$$

L'équation de cette ellipse est $y^2 \sin^2 \alpha + x^2 = r^2 \sin^2 \alpha$;
donc

$$ds = \frac{dx}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{r^2 \sin^4 \alpha + x^2 \cos^2 \alpha}{r^2 \sin^2 \alpha - x^2}};$$

posons : $x = r \sin \alpha \sin \varphi$,

et

$$ds = rd\varphi \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi} = rd\varphi \sqrt{1 - \frac{a^2 - h^2}{a^2} \cos^2 \varphi}.$$

Le périmètre total sera donné par l'intégrale

$$4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \frac{a^2 - h^2}{a^2} \cos^2 \varphi};$$

et la surface du cylindre a pour expression :

$$\begin{aligned} S &= 4ar \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \frac{a^2 - h^2}{a^2} \cos^2 \varphi} = \\ &= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{a^2 - (a^2 - h^2) \cos^2 \varphi}, \end{aligned}$$

expression identique à celle que l'on a trouvée ci-dessus, et dont on déduirait la même conséquence.

Dans le cas où la base du cylindre serait une ellipse, dont les axes seraient A et B, on aurait :

$$S = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{B^2 \sin^2 \alpha - (B^2 \sin^2 \alpha - A^2) \sin^2 \varphi},$$

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{B^2 h^2 - (B^2 h^2 - A^2 a^2) \sin^2 \varphi},$$

ou

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{A^2 a^2 - (A^2 a^2 - B^2 h^2) \cos^2 \varphi};$$

formule qui redonnerait la précédente si on avait $A = b = r$.

On peut l'écrire :

$$S = 2A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{a^2 - \left(a^2 - \frac{B^2}{a^2} h^2\right) \cos^2 \varphi};$$

et l'ellipse hauteur du rectangle aurait pour axes a et $\frac{B}{A} h$.

La hauteur de ce rectangle serait A .
