MOUTIER

Solution d'une question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 101-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__101_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION D'EXAMEN (t. V, p. 703).

PAR M. MOUTIER,
elève au Collége de Versailles.

—

D'un point fixe, D (*fig.* 18) d'un diamètre FDE d'un cercle, on mène une sécante quelconque, BDA au cercle ; en A et B on lui mène les tangentes AC, BC ; et on joint les points D et C ; démontrer que le produit

$$\text{tang ADE. tang EDC} = \text{constante.}$$

Joignons OC ; et du point C abaissons la perpendiculaire CC′ sur le prolongement du diamètre FDE ; la droite CC′ est la polaire du point D ; et le point C′ est son conjugué ; de sorte que si par le point D on mène des cordes quelconques ; et si par les points de contact avec le cercle régulateur, l'on mène des couples de tangentes, tous les points C seront situés sur la droite CC′.

Évaluons maintenant CC′ dans les deux triangles rectangles CDC′, COC′.

$$CC' = C'D \text{ tang EDC}.$$
$$CC' = C'O \text{ tang COC}'.$$

Divisant membre à membre :

$$\text{tang EDC} = \frac{C'O}{C'D} \text{ tang COC}'.$$

Remarquons que dans le triangle rectangle ODM, l'angle

ODM ou ADE est le complément de l'angle COC', et alors :

$$\text{tang ADE} = \text{cotang COC}'.$$

Multiplions membre à membre ces deux dernières galités : il vient :

$$\text{tang EDC. tang ADE} = \frac{C'O}{C'D}.$$

Les lignes CO et C'D étant constantes, le produit des tangentes est constant, et ce produit est égal au rapport des distances du conjugué du point fixé D, au centre du cercle régulateur, et à ce point fixe.

Le théorème subsiste encore, lorsque le point D (*fig.* 19) est pris sur le prolongement du diamètre ; son conjugué C' est alors à l'intérieur du cercle qui est coupé par la polaire CC'O.

Nous avons toujours :

$$CC' = C'O \text{ tang COC}'$$
$$CC' = C'D \text{ tang EDC};$$

Pour :

$$\text{tang EDC} = \frac{C'O}{C'D} \text{ tang COC}'.$$

Or, dans le triangle rectangle MOD, les angles COC' et ADE étant complémentaires :

$$\text{tang ADE} = \text{cotang COC}',$$

et :

$$\text{tang EDC tang ADE} = \frac{C'O}{C'D}. \text{ C. Q. F. D.}$$