NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. RISPAL

Démonstration des formules qui donnent $\sin(a+b)$, etc.

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 84-88

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__84_0>

DÉMONSTRATION

des formules qui donnent sin $(a+b)$, etc.

PAR M. A. RISPAL,
Elève de l'Ecole normale.

—

On peut arriver à la démonstration de ces formules d'une façon très-simple et dès le commencement même de la trigonométrie, en donnant les définitions suivantes des *lignes* trigonométriques.

BAC étant un certain angle,

Si on abaisse d'un point quelconque D de AB, une perpendiculaire DF sur AC,

Les rapports $\frac{DF}{AF}$, $\frac{DF}{AD}$, $\frac{AF}{AD}$ sont constants pour l'angle A, quelle que soit la perpendiculaire DF.

Ces rapports peuvent donc servir à déterminer parfaitement cet angle.

Le premier, $\frac{DF}{AF}$, est appelé tangente de l'angle A.

Le deuxième, $\frac{DF}{AD}$, est dit le sinus de l'angle A.

Et le troisième, $\frac{AF}{AD}$, est appelé le cosinus.

Alors nous ne dirons plus les *lignes*, mais bien les rapports trigonométriques (*).

(*) ces definitions sont celles du Manuel de geométrie et devraient être adoptées. Tm.

Ces définitions nous donnent immédiatement :

$$DF = AF \,.\, \text{tang}\, A\,,\quad DF = AD \sin A\,,\quad AF = AD \cos A.$$

La troisième nous montre que la projection d'une ligne sur une autre est égale à la longueur de cette même ligne multipliée par le cosinus de l'angle compris ; car AC est la projection de AD.

On aurait aussi dès lors :

$$DF = AD \cos D\,,$$

mais $$DF = AD \sin A\,;$$

donc $$\sin A = \cos D = \cos(90° - A)\,;$$

ce qui montre que le sinus d'un angle est égal au cosinus du complément de cet angle.

On voit aisément que si on projette AF et FD sur l'hypoténuse AD, cette hypoténuse AD est égale à la somme des projections de ces deux lignes.

Donc $$AD = AF \cos A + FD \cos D.$$

$$\cos A = \frac{AF}{AD}, \quad \cos D = \frac{FD}{AD}.$$

Substituant ces deux valeurs, il vient :

$$AD = \frac{\overline{AF}^2}{AD} + \frac{\overline{FO}^2}{AD}\,;$$

ou $$\overline{AF}^2 + \overline{FD}^2 = \overline{AD}^2\,;$$

ce qui démontre, en passant, le carré de l'hypoténuse.

Si le triangle est quelconque, comme ABC, on pourra voir, avec la plus grande simplicité, que les côtés sont entre eux dans les mêmes rapports que les sinus des angles opposés.

Venons maintenant à la démonstration qui fait l'objet de ce théorème.

Je suppose que j'ai deux angles a et b, dont la somme est :

$$< 180° \ (\textit{fig. } 9 \textit{ bis}).$$

Elle peut différer aussi peu de 180° qu'on voudra, et le théorème n'en sera pas moins vrai.

Sur une droite indéfinie AB, je fais un angle BAC $= a$.

En un point quelconque C de la droite AC, je fais un angle $= b$.

J'obtiens ainsi le triangle ACD, dans lequel l'angle extérieur CDB $= a + b$.

Par le théorème des projections, on a immédiatement :

$$AC = AD \cos a + CD \cos b.$$

[On sait que cette égalité est toujours vraie; car si, par exemple, l'angle b était obtus, le deuxième terme du deuxième membre serait négatif; mais le cosinus d'un angle obtus est négatif. On a donc deux signes — qui se réduisent à $+$ par les règles de la soustraction.]

Si maintenant je remplace dans l'égalité précédente les côtés par les sinus des angles opposés, ce qui ne trouble pas l'égalité, puisque ces sinus sont proportionnels aux côtés, j'aurai l'égalité

$$\sin D = \sin b \cos a + \sin a \cos b.$$

Or $\sin D = \sin(a + b)$, puisque ces deux angles sont supplémentaires. Donc

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

On aurait de même :

$$AD = AC \cos a - CD \cos(a + b);$$

d'où

$$CD . \cos(a + b) = AC \cos a - AD.$$

Et en remplaçant, comme tout à l'heure, les côtés par les sinus :

$$\begin{aligned} \sin a . \cos(a + b) &= \cos a . \sin(a + b) - \sin b, \\ &= \cos a [\sin a \cos b + \sin b \cos a] - \sin b, \\ &= \sin a [\cos a \cos b - \sin a \sin b]. \end{aligned}$$

Donc $\quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Si maintenant, dans les deux formules que nous venons de trouver, on fait $a+b=a'$, $b=a'-a$, elles deviennent :

$$\sin a \,.\, \cos(a'-a) + \sin(a'-a)\cos a = \sin a',$$
$$\cos a \,.\, \cos(a'-a) - \sin a \sin(a'-a) = \cos a'.$$

Ces deux formules, qui sont deux équations du premier degré, donneront :

$$\cos(a'-a) \quad \text{et} \quad \sin(a'-a).$$

On a donc les quatre formules :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Puisque les trois dernières formules ont été déduites de la première, on voit qu'il suffit de démontrer la généralité de la première. Or elle est vraie, tant que l'on a $a+b<180°$; il est donc facile de l'étendre au cas où l'on aurait $a+b>180°$, et en général à tous les autres cas.

Ainsi, par exemple, si on a :

$$a+b>180,$$

je puis supposer :

$$a+b=180+a'+b';$$
$$a=90+a', \quad b=90+b'.$$

Alors

$$\sin(a+b)=\sin(180+a'+b') = -\sin(a'+b').$$

Or $a'+b'$ étant <180, on a :

$$-\sin(a'+b') = -\sin a' \cos b' - \sin b' \cos a'.$$

Mais $\quad \sin a' = \sin(a-90) = -\cos a,$

$\quad \cos a' = \cos(a-90) = \sin a.$

De même $\qquad \sin b' = -\sin b,$

$$\cos b' = \cos b.$$

Ainsi $\qquad -\sin(a'+b') - \sin a \cos b + \sin b \cos a.$

Or $\qquad \sin(a+b) = -\sin(a'+b').$

Donc $\qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$

On pourrait ainsi étendre la formule à tous les cas possibles.

Cette généralisation montre immédiatement que la formule est vraie de 0° à 360° ; car $a'+b'$ est aussi peu différente de 180° que l'on voudra. D'ailleurs, $a+b$ est $>$ 180° ; donc on voit que la formule est vraie de 180° à 360°, comme de 0° à 180°. Nous avons posé $a+b=180+a'+b'$; donc $a+b$ est aussi peu différent qu'on le veut de 360°.

Or, au delà de 360°, on retombe sur les mêmes valeurs des rapports trigonométriques que de 0° à 360°. Ainsi la formule est toujours vraie et dans tous les cas, lorsque a et b sont positifs.

On prouverait avec la même facilité que la formule est toujours vraie, lorsque $a+b$ ou l'un des deux angles est négatif. Elle est donc vraie dans tous les cas.

Note. Cette démonstration rentre dans celle qui a été indiquée dans une note, t. III, p. 375. Tm.