Nouvelles annales de mathématiques

A. Vachette

Théorème sur les nombres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 68-70

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__68_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

THEORÈME SUR LES NOMBRES.

PAR M. A. VACHETTE,
Licencié ès sciences mathématiques et physiques.

Théorème. Il est impossible de trouver deux nombres rationnels dont le produit soit égal à la différence de leurs carrés.

Ainsi l'équation

$$xy = x^2 - y^2 \tag{1}$$

est impossible en nombres rationnels.

Démonstration. Si $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ sont fractionnaires $\begin{matrix} x = \dfrac{a}{b} \\ y = \dfrac{c}{d} \end{matrix}$, on les réduit au même dénominateur $\begin{matrix} x = \dfrac{N}{D} \\ y = \dfrac{N'}{D} \end{matrix}$, et l'équation est ramenée à des nombres entiers.

On peut supposer $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ premiers entre eux ; car s'ils ont un facteur commun a, ce facteur disparaîtra.

L'équation (1) revenant à

$$xy = (x + y)(x - y),$$

$\begin{matrix} x+y \\ x-y \end{matrix}$ sont premiers entre eux ; sinon, leur somme $2x$ et leur différence $2y$ auraient, ou un facteur commun autre que deux qui devrait diviser à la fois $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, ou le facteur commun 2 qui, divisant à la fois $\begin{matrix} x+y \\ x-y \end{matrix}$, entraîne pour $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ la nécessité d'être tous deux pairs ou tous deux impairs ; $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ étant premiers entre eux ne peuvent être qu'impairs ; mais alors $x^2 - y^2$ serait pair, tandis que xy serait impair ; on aurait, par l'équation (1), un nombre impair égal à un nombre pair, ce qui est absurde.

Remarque. Le théorème résulte immédiatement de la résolution directe ; on a ·

$$x = \frac{y(1 \pm \sqrt{5})}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{-x(1 \pm \sqrt{5})}{2},$$

y étant rationnel, x ne peut l'être.

Autrement encore. Puisque $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ sont premiers entre eux, $\begin{matrix} x^2 \\ y^2 \end{matrix}$ le sont aussi, et l'on aurait dans xy des facteurs qui n'entreraient pas dans $x^2 - y^2$.

Généralement, l'équation

$$x^m - y^n = (xy)^p$$

est impossible en nombres rationnels, par une raison analogue.

Un cas particulier de cette équation est :

$$x^m - y^m = (xy)^p.$$

On peut faire $(xy)^p = z^m$, si $p = mn$, car alors $z = (xy)^n$;

$$x^m - y^m = z^m$$

est impossible pour tout nombre z qui est une puissance du produit des deux premiers nombres $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$. C'est peut-être une lueur jetée sur le célèbre théorème de Fermat, que, passé le deuxième degré, l'équation $x^m + y^m = z^m$ est impossible.

Note. Il suffit de démontrer ce dernier théorème pour le nombre 4 et pour les exposants nombres premiers. Fermat l'a démontré pour 4 ; Euler pour 3 ; Legendre pour 5 ; M. Dirichlet pour 14, et M. Lamé ensuite pour 7 ; démonstration que M. Lebesgue a considérablement simplifiée (*Voir* Liouville, t. V, 1840). Tm.