

LEBESGUE

**Sur l'inscription des polygones réguliers  
de 15 et de 17 côtés**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 5  
(1846), p. 683-689

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1846\\_1\\_5\\_683\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_683_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SUR L'INSCRIPTION

*des polygones réguliers de 15 et de 17 côtés.*

**PAR M. LEBESGUE.**

---

*Problème.* Résoudre l'équation

$$\cos nx - \cos mx = 0, \quad (a)$$

où  $n$  et  $m$  sont des entiers positifs dont  $m$  est le plus grand.

*Solution.* On a :

$$\cos nx - \cos mx = 2 \sin \frac{m+n}{2} x \sin \frac{m-n}{2} x ;$$

---

(\*) Il est assez remarquable que le double d'un nombre premier se comporte presque toujours comme un nombre premier. Cette circonstance s'est déjà présentée dans notre article sur les associés doubles.

pour que le deuxième membre soit nul, il faut poser  $\frac{m \pm n}{2} x$ , égal à un multiple  $k\pi$  de la demi-circonférence. De la  $x = \frac{2\pi \cdot k}{m \pm n}$ , l'équation (a), qui devient algébrique, et du degré  $m$  quand on pose  $\cos x = y$ , donne donc la division de la circonférence en  $m + n$  parties égales, et la division en  $m - n$  parties égales.

Soit, pour exemple particulier, l'équation

$$\cos 16x - \cos x = 0. \quad (b)$$

Ce sera le cas de la division en 17 parties égales et en 15 parties aussi égales.

Les racines de l'équation (b), rangées par ordre de grandeur, seront donc :

$$\begin{aligned} & \cos 0, \cos \frac{2\pi}{17}, \cos \frac{2\pi}{15}, \cos 2. \frac{2\pi}{17}, \cos 2. \frac{2\pi}{15}, \cos 3. \frac{2\pi}{17}, \\ & \cos 3. \frac{2\pi}{15}, \cos 4. \frac{2\pi}{17}, \cos 4. \frac{2\pi}{15}, \cos 5. \frac{2\pi}{17}, \cos 5. \frac{2\pi}{15}, \\ & \cos 6. \frac{2\pi}{17}, \cos 6. \frac{2\pi}{15}, \cos 7. \frac{2\pi}{17}, \cos 7. \frac{2\pi}{15}, \cos 8. \frac{2\pi}{17}. \end{aligned}$$

Or, la formule

$$2 \cos 2\omega = (2 \cos \omega)^2 - 2,$$

d'où

$$2 \cos 4\omega = (2 \cos 2\omega)^2 - 2 = (2 \cos \omega)^4 - 4(2 \cos \omega)^2 + 2,$$

donnera, en posant  $2 \cos x = y$ ,  $2 \cos 4x = z$ ,

$$z = y^4 - 4y^2 + 2, \quad y = z^4 - 4z^2 + 2, \quad (c)$$

la seconde équation revenant à  $2 \cos 16x = 2 \cos x$ .

(Au lieu de ce système (c), on aurait pu obtenir un système de quatre équations, traité par M. Amiot, dans son mémoire sur les polygones réguliers (*Annales*, t. III, p. 272, (A).)

Pour résoudre le système (c), qui conduit à une équation du seizième degré, on fera :

$$y = \frac{p+q}{2}, \quad z = \frac{p-q}{2},$$

et les équations (c), combinées par addition et soustraction, donneront :

$$\left. \begin{aligned} 8p &= p^4 + 6p^2q^2 + q^4 - 16(p^2 + q^2) + 32 \\ -2q &= pq(p^2 + q^2) - 8pq; \end{aligned} \right\} (d)$$

la seconde équation donne d'abord  $q = 0$ , ce qui réduit la première à

$$p^4 - 16p^2 - 8p + 32 = (p-4)(p+2)(p^2 + 2p - 4);$$

de là, à cause de  $p = 4 \cos x$ , le cosinus cherché prendra les quatre valeurs :

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5}),$$

ou

$$\cos 0, \quad \cos \frac{2\pi}{3}, \quad \cos 3 \cdot \frac{2\pi}{15}, \quad \cos 6 \cdot \frac{2\pi}{15};$$

autrement,

$$\cos 0, \quad \cos \frac{2\pi}{3}, \quad \cos \frac{2\pi}{5}, \quad \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{5}.$$

La seconde équation (d) donne encore :

$$p^2 + q^2 = 8 - \frac{2}{p}, \quad \text{ou bien } q^2 = -p^2 + 8 - \frac{2}{p},$$

ce qui réduit la première équation (d) à

$$p^6 - 8p^4 + 4p^2 + 8p^2 - 1 = 0,$$

qui se décompose ainsi :

$$(p^2 - p - 1)(p^4 + p^3 - 6p^2 - p + 1) = 0. \quad (e)$$

Le deuxième facteur étant comparé à

$$\left(p^2 + \frac{1}{2}p - 1\right)^2 = p^4 + p^3 - \frac{7}{4}p^2 - p + 1,$$

se met de suite sous la forme :

$$\begin{aligned} \left(p^2 + \frac{1}{2}p - 1\right)^2 - \frac{17}{4}p^2 &= \left(p^2 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})p - 1\right) \\ &\quad \left(p^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})p - 1\right); \end{aligned}$$

ainsi l'équation (e) devient :

$$(p^2 - p - 1) \left(p^2 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})p - 1\right) \left(p^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})p - 1\right) = 0. \quad (f)$$

Chaque facteur étant de la forme

$$p^2 - 2Ap - 1 = 0, \text{ d'où } p = A \pm \sqrt{1 + A^2},$$

il en résultera :

$$q = \pm \sqrt{7 + 2A - 2A^2 \mp 2(A + 1)\sqrt{1 + A^2}}.$$

Pour le facteur,  $p^2 - p - 1 = 0$ .  $A = \frac{1}{2}$ , et les quatre valeurs du cosinus sont :

$$\frac{1}{4} (1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{30 \mp 6\sqrt{5}}).$$

Les signes supérieurs qui affectent  $\sqrt{5}$  devant être pris ensemble, de même que les inférieurs, il n'y a que quatre valeurs qui répondent, comme on le voit facilement, à

$$\cos \frac{2\pi}{15}, \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{15}, \cos 4 \cdot \frac{2\pi}{15}, \cos 7 \cdot \frac{2\pi}{15}.$$

Pour le second facteur de l'équation (f), on fera :

$$A = \frac{1}{4} (\sqrt{17} - 1),$$

et le cosinus prendra les quatre valeurs :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} (-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}) \pm \\ \pm & \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34} + 2\sqrt{17}}, \\ & \frac{1}{16} (-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}) \pm \\ \pm & \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{34} + 2\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Pour le troisième facteur,  $A = \frac{1}{4}(-\sqrt{17} - 1)$ , et le cosinus prendra les quatre valeurs :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} (-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}) \pm \\ \pm & \frac{1}{8} \sqrt{17 - 3\sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34} - 2\sqrt{17}}, \\ & \frac{1}{16} (-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}) \pm \\ \pm & \frac{1}{8} \sqrt{17 - 3\sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{34} - 2\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Il suffit de ranger ces huit valeurs par ordre de grandeur pour avoir :

$$\begin{aligned} & \cos \frac{2\pi}{17}, \quad \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{17}, \quad \cos 3 \cdot \frac{2\pi}{17}, \quad \cos 4 \cdot \frac{2\pi}{17}, \\ & \cos 5 \cdot \frac{2\pi}{17}, \quad \cos 6 \cdot \frac{2\pi}{17}, \quad \cos 7 \cdot \frac{2\pi}{17}, \quad \cos 8 \cdot \frac{2\pi}{17}. \end{aligned}$$

Je ferai remarquer, en finissant, que les valeurs  $a, b, c, d$  des pages 276 et 277 des *Annales*, t. III, renferment une faute de calcul. Le radical  $\sqrt{68 + 14\sqrt{17} + \dots}$  doit être remplacé par  $\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + \dots}$ ; alors, en sim-

plifiant, on retrouve les valeurs données plus haut. Ainsi

$\cos \frac{2\pi}{17}$  est égal à

$$\frac{1}{16} (-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}) + \\ + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

résultat donné par M. Gauss à la page 487 des *Recherches arithmétiques*. Dans la traduction de cet ouvrage, il y a nombre de fautes d'impression non relevées dans l'Errata. Ainsi, dans la formule citée, le radical

$$\frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \dots}$$

porte le signe —, qui appartient à  $\cos 4 \cdot \frac{2\pi}{17}$ .

Pour avoir l'équation ayant pour racines

$$\cos 0 \cdot \frac{2\pi}{17}, \quad \cos \frac{2\pi}{17}, \quad \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{17} \quad \dots \quad \cos 8 \cdot \frac{2\pi}{17},$$

il aurait fallu prendre :

$$\cos 8x - \cos 9x = 0.$$

En général, pour la division  $2m+1$  parties égales, on prendra :

$$\cos mx - \cos (m+1)x = 0. \quad (k)$$

Si l'on pose  $\cos x = y$ , on aura une équation du  $m+1$  degré qui se réduira au  $m^{\text{ème}}$ , en la divisant par  $y-1$ .

L'équation (k) a pour racines les valeurs différentes de  $\cos \cdot \frac{2\pi \cdot i}{2m+1}$ .

Comme l'on a :

$$\cos (m+1)x = 2 \cos x \cdot \cos mx - \cos (m-1)x,$$

il en résultera :

$$\begin{aligned} (\cos(m+1)x - \cos mx) &= 2(\cos x - 1)\cos mx + \\ &+ \cos mx - \cos(m-1)x; \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} \cos mx - \cos(m-1)x &= 2(\cos x - 1)\cos(m-1)x + \\ &+ \cos(m-1)x - \cos(m-2)x, \end{aligned}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\cos 2x - \cos x = 2(\cos x - 1)\cos x + \cos x - 1,$$

de sorte qu'on aura :

$$\begin{aligned} \cos(m+1)x - \cos mx &= (\cos x - 1)[2\cos mx + \\ &+ 2\cos(m-1)x + 2\cos(m-2)x + \dots + 2\cos x + 1]. \end{aligned}$$

L'équation (k) sera donc :

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \dots + 2\cos(m-1)x + 2\cos mx = 0,$$

ce qui est un théorème connu.

En posant  $\cos x = y$ , on a une équation du  $m^{\circ}$  degré résoluble par les méthodes de M. Gauss ; la solution de cette équation a été aussi donnée dans un mémoire d'Abel (Journal de Crelle, t. IV), dont on ne saurait trop recommander l'étude. Malheureusement l'auteur est mort sans avoir complété les applications de son mémoire. Des recherches analogues avaient été entreprises par E. Gallois. Il a laissé à ce sujet un mémoire qui paraît avoir été peu compris, mais dont M. Liouville a promis un commentaire, attendu par tous ceux qui s'occupent de la résolution algébrique (ou par radicaux) des équations, résolution dont Abel s'est beaucoup occupé. Il avait, dit-il, trouvé une règle pour reconnaître si une équation algébrique était ou non résoluble par radicaux. C'est là un sujet de recherches bien beau, mais probablement bien difficile.