FINCK

Note sur la division abrégée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 599-603

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__599_1>

NOTE SUR LA DIVISION ABRÉGÉE

PAR M. FINCK,

docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au collége royal de Strasbourg.

—

Ce que j'ai publié à ce sujet dans les *Annales*, et dans mon

Arithmétique, deuxième édition, page 108 (en 1843 ; comparez la note de la page 467 des *Annales*), sur la méthode de Fourier, fournit deux limites du dernier diviseur, outre celle que j'ai énoncée; ces deux autres limites sont : 9 fois le nombre des chiffres négligés au diviseur ; ce qui est évident, et 9 fois le nombre des chiffres déterminés au quotient. Cette dernière est énoncée en toutes lettres dans mon Arithmétique, et n'oublions pas que la méthode de Fourier *n'est que la méthode ancienne appliquée à tous les chiffres du quotient*, *avec changement dans l'ordre suivant lequel on soustrait les produits partiels.* Si l'on en doute, on n'a qu'à traiter un même exemple par les deux. Cette même dernière règle étant indépendante du nombre des chiffres décimaux des deux nombres donnés, on voit que l'opération si effrayante, consistant dans l'addition des chiffres du diviseur, est écartée. Je vais présenter la démonstration de ladite règle, avec quelques modifications, pour mieux l'adapter à la méthode ancienne; elle ne diffère guère de celle qui a déjà été publiée dans les *Annales*. Voici comment on peut la formuler.

Si le dernier diviseur est $\overset{=}{>}\frac{9}{\text{n}}$ *multiplié par le nombre des chiffres du quotient traité comme un nombre entier, l'erreur du dernier chiffre de ce quotient est comprise entre* $+1$ et $-\text{n}$; *le nombre* n *est à volonté* $>$ *ou* <1.

Soit D le diviseur total, D_{i+1} le dernier diviseur, $d_i\, d_{i-1} \ldots\, d_{-\infty}$ la partie restante, i pouvant être $><0$; j'entends par d_i le chiffre qui exprime des unités égales chacune à 10^i. Je suppose que le quotient doive être déterminé à une unité près ; la question peut toujours se ramener à ce cas. Si le diviseur est composé d'un nombre infini de chiffres ($d_{-\infty}$) tous les chiffres du quotient seront cherchés par la méthode abrégée ; dans le cas contraire rien n'empêche de supposer nuls les chiffres du diviseur à partir du dernier chiffre significatif exclusivement. Soit le quotient $c_{a-1}\ldots c_1 c_0$; le dernier chiffre c_0 estdéterminé par le diviseur D_{i+1}; l'avant-dernier c_1 par $D_{i+1}\, d_i$, etc. Le premier c_{a-1} par

$$D_{i+1}\, d_i\, d_{i-1}\ldots\, d_{i-a+2}.$$

Dans le dividende on prend sur la gauche ce qu'il faut pour trouver c_a au moyen du diviseur D, le reste à droite n'entre pas en ligne de compte. Soit R_{i+1} le reste final fourni par cette partie de gauche; le dernier dividente partiel donnant au quotient des unités simples, il s'ensuit que R_{i+1} est de même espèce que D_{i+1}, ce qu'on reconnaît d'ailleurs; de plus $R_{i+1} < D_{i+1}$; si donc à côté de R_{i+1} on descend les chiffres négligés au dividende, on aura un nombre $< D$ pour reste final par rapport au dividende total. Soit R ce reste, S la somme des produits partiels qui n'ont pas été retranchés; $R-S$ est égal au dividende moins le produit du diviseur total par le quotient $c_{a-1}\ldots c_0$. Si donc $S < nD$, $R-S$ tombe entre D et $-nD$, et l'erreur du quotient est comprise entre 1 et $-n$.

RS comprend les produits suivants

$$c_{a-1} \times d_{i-a+1}\ldots d_{-\infty},$$

lequel

$$= c_{a-1}.\, 10^{a-1}.d_{i-a+1}\ldots\, d_{-\infty} < c_{a-1}.\, 10^{a-1}\, 10^{i-a+1},$$
$$= c_{a-1}.\, 10^{i+1},$$
$$c_{a-2} \times d_{i-a+2}\ldots\, d_{-\infty\, 1}\ldots$$
$$= c_{a-2}.\, 10^{a-2}.\, d_{i-a+2}\ldots\, d_{-\infty} < c_{a-2}.\, 10^{i+1},$$
$$c_0 \times d_i\, \ldots\, d_{-\infty}\ldots \quad < c_0.\, 10^{i+1}.$$

Donc

$$S < (c_{a-1} + c_{a-2} + \ldots + c_0)\, 10^{i+1} \leqq 9a.\, 10^{i+1}.$$

Et pour que $S < nD$, il suffit que

$$9a.\, 10^{i+1} \leqq n\, D_{i+1}.\, 10^{i+1},$$

ou que $$9\,a < n\, D_{i+1}. \quad c.\, q.\, f.\, d.$$

Ainsi prenez sur la gauche du diviseur une tranche plus grande que $\frac{9}{n}$ multiplié par le nombre des chiffres du quotient; à la suite conservez au diviseur autant de chiffres plus un, que le quotient doit en avoir, et au dividende négligez sur la droite tout ce qui ne sert pas à faire connaître le premier chiffre du quotient, au moyen des deux parties conservées au diviseur.

Voilà ma théorie : elle n'est pas longue; est-elle confuse? Elle donne le quotient à une unité près, si l'on veut. Il est clair du reste que si $R_{i+1} < c_{a-1} + c_{a-2} + \ldots + c_0$, le quotient est approché en moins.

Remarque 1. Si le diviseur est fini quant au nombre de ses chiffres, on peut prendre pour limite de D_{i+1} la somme des chiffres placés à sa droite. Car soit $D = D_{i+1} d_i \ldots d_{i-r}$;

$$S = c_0 \times d_i \ldots d_{i-r} + 10.\, c_1 \times d_{i-1} \ldots d_{i-r} +$$
$$+ 10^2 c_2 d_{i-2} \ldots d_{i-r} + \ldots + 10^r c_r d_{i-r},$$
$$= d_{i-r} \times c_r \ldots c_2 c_1 c_0 + d_{i-r+1}.\, 10.\, c_{r-1} \ldots c_0 + \ldots$$
$$< c_{r-a} 10^{r+1} (d_{i-r} + {}^{i-r+1}d + \ldots + d_i).$$

Cette somme exprimant des unités dont chacune vaut 10^{i-r}, de sorte que unités du premier ordre :

$$S < 10^{i+1} (d_{i-r} + \ldots + d_i);$$

si donc $\qquad d_{i-r} + \ldots + d_i < D_{i+1},$

on conclura que $S < D$, etc., $R < D$ et $> -D$.

Remarque 2. Dans les discussions scientifiques, il me semble bon de rester à la température 0; on évite ainsi les tempêtes dans un verre d'eau. J'admets ce qui est prouvé, rien de plus.

Voyez à ce sujet une discussion antérieure (il ne s'agit pas de celle de 1845). Du reste je ne parle ici que pour moi; je ne donne de conseils à personne, parce que la plupart du temps, des conseils non demandés sont estimés moins que rien par ceux à qui on les donne. C'est le parti que je me permets de prendre moi-même quelquefois; l'âge m'a donné un peu d'expérience.