ARISTIDE MARRE

Trouver la somme de toutes les permutations différentes d'un nombre donné

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 57-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__57_1>

Trouver la somme de toutes les permutations différentes d'un nombre donné.

PAR M. ARISTIDE MARRE,
Soldat au 71e régiment de ligne.

—

Soit en général N un nombre composé de n chiffres ; trois cas peuvent se présenter : ou ces n chiffres sont tous différents, ou parmi eux il y en a p d'une espèce, q d'une autre espèce, etc., ou bien le nombre proposé est composé avec un seul et même chiffre.

1er *cas*. Soit $n....dcba$ le nombre proposé de n chiffres différents ; il fournira, comme on le sait, $1.2.3....n$ permutations. Or, dans l'addition de ces $1.2.3....n$ nombres, il est facile de voir : 1° que toutes les colonnes verticales donneront une même somme partielle, prise en valeur absolue ; 2° que cette somme constante en valeur absolue, n'est autre chose que la somme des chiffres du nombre proposé, multipliée par le nombre des permutations de $(n-1)$ lettres. D'où il résulte que les sommes partielles des diverses colonnes verticales sont :

$(a+b+c+d+\ldots.+n)\,[1.2.3\ldots.(n-1)]$ pour la 1re à droite,
$(a+b+c+d+\ldots.+n)\,[1.2.3\ldots.(n-1)] \times 10$ pour la 2e,
$(a+b+c+d+\ldots.+n)\,[1.2.3\ldots.(n-1)] \times 10^2$ pour la 3e,

$$\vdots$$

$(a+b+c+d+\ldots.+n)\,[1.2.3\ldots.(n-1)] \times 10^{n-1}$ pour la n^{ieme} ou dernière,

et que la somme demandée peut s'écrire :

$$\frac{1.2.3\ldots.n}{n}(a+b+c+d+\ldots.+n)\,(1+10+10^2+10^3+\ldots.+10^{n-1})\,;$$

ou bien, en désignant par s la somme des chiffres du nombre proposé, et en observant que le quotient $\frac{10^n-1}{10-1}$, équivalent au dernier facteur entre parenthèse, est un nombre composé de n chiffres tous égaux à 1, on arrive à la formule :

$$S = \frac{1.2.3\ldots.n}{n} \times s \times 11111\ \ldots.\ \text{(en nombre } n).$$

Exemple : Soit proposé de trouver la somme des permutations différentes du nombre 1846. Nous aurons :

$$S = \frac{1.2.3.4}{4}\,.\,19\,.\,1111 = 114 \times 1111 = 126654.$$

2e *cas*. Si le nombre donné n'a pas tous ses n chiffres différents, il faut alors remarquer que le nombre des permutations n'est plus $1.2.3\ldots n$ pour n lettres ; mais ce produit divisé par $1.2.3.\ldots p$, s'il y a p de ces n lettres semblables, ou divisé par $1.2.3 \ldots p \times 1.2.3 \ldots q$, s'il y en a p d'une espèce, q d'une autre, etc.

Soit proposé, par exemple, de trouver toute la somme des permutations différentes de 22211.

La formule donnera :

$$S = \frac{1.2.3.4.5}{5 \times 1.2.3 \times 1.2} \times 8 \times 11111 = 177776.$$

3^e^ *cas.* Supposons enfin que le nombre proposé soit composé avec un seul et même chiffre. Dans ce cas, $p = n$.

Soit le nombre 555555 dont on demande la somme des permutations. Il est évident à priori que cette somme n'est autre chose que le nombre lui-même. La formule donne un résultat parfaitement identique avec celui-ci ; elle conduit à :

$$S = \frac{1.2.3.4.5.6}{6 \times 1.2.3.4.5.6} \,.\, 30 \,.\, 111111,$$
$$= 5 \times 111111 = 555555.$$

11. Les Hindous rangeaient, parmi leurs règles d'arithmétique, la règle qui donne le moyen de trouver la somme des permutations dont tous les chiffres sont différents (1^er^ cas), et M. Reuben Barrow nous a conservé l'énoncé suivant :

Place au-dessus des chiffres du nombre donné une progression arithmétique commençant par 1, au rang des unités, et allant en croissant d'une unité : divise le produit des termes de cette progression par le nombre des chiffres qui entrent dans le nombre proposé : multiplie la somme des chiffres de ce même nombre par le quotient ainsi obtenu ; et ce produit, écris-le autant qu'il y a de chiffres dans le nombre donné, en le reculant successivement d'un rang vers la droite ; la somme de ces lignes est la somme de toutes les permutations.

Exemple déjà cité : 1846.

$$
\begin{array}{lll}
 & & 114 \\
 & & \ \ 114 \\
 & & \ \ \ \ 114 \\
4321 & \frac{1 . 2 . 3 . 4}{4} . 19 = 114 & \ \ \ \ \ \ 114 \\
1846 & & \overline{S = 126654} .
\end{array}
$$