Jules Vieille

Sur l'équation différentielle de la page 396

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 509-510

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__509_0>

SUR L'EQUATION DIFFÉRENTIELLE de la page 396.

PAR M. JULES VIEILLE,
Professeur à l'École normale.

Le dernier numéro de l'utile recueil que vous rédigez, renferme un article de M. Turquan (p. 396), dans lequel ce professeur se propose d'intégrer l'équation :

$$(1) \ldots \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(y)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\psi(y).$$

L'intégrale que donne l'auteur, n'est pas exacte, au lieu de la formule :

$$x=\int\frac{dy\, e^{\int\varphi(y)\,dy}}{\sqrt{B+\psi(y)\, e^{2\int\varphi(y)\,dy}}},$$

qui termine l'article en question, il faut écrire :

$$x=\int\frac{dy\, e^{\int\varphi(y)\,dy}}{\sqrt{B+2\int e^{2\int\varphi(y)\,dy}\cdot\psi(y)\,dy}}+C.$$

Peut-être n'est-ce qu'une faute d'impression (*). Au reste l'intégrale de l'équation (1) est connue depuis longtemps. Ainsi, dans la mécanique de Poisson (1er vol. p. 353), on trouve l'intégrale de l'équation à laquelle conduit l'étude du mouvement du pendule simple dans un milieu résistant. Cette équation différentielle est de même forme que l'équation (1),

(*) C'est une faute, mais non pas typographique ; elle m'a echappé.
Tm.

et le procédé d'intégration que donne Poisson, est applicable de tout point au cas actuel.

Si maintenant, on examine le procédé employé par M. Turquan, on trouve qu'il peut être notablement abrégé. En effet, après avoir changé la variable indépendante x, dans la variable y, ce qui donne l'équation (2) de l'auteur :

$$p\frac{dp}{dy}+p^2\varphi(y)=\psi(y),$$

il est inutile de recourir à la variation des constantes arbitraires. N'est-il pas évident que *si l'on prend pour inconnue la fonction* p², l'équation ci-dessus que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{d.p^2}{dy}+2\varphi(y).p^2=2\psi(y),$$

n'est autre qu'une *équation linéaire du premier ordre*, entre la fonction p^2 et la variable y, qui s'intègre immédiatement ?

En terminant, je ferai observer que l'équation (1), objet de ces recherches, n'est elle-même qu'un cas particulier de l'équation bien connue :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\psi(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n,$$

laquelle, par le changement de variable indépendante indiqué plus haut, se ramène à :

$$\frac{dp}{dy}+\varphi(y).\ p=\psi(y)p^{n-1}.$$

C'est l'*équation de Jacques Bernoulli.*

Note. Cette dernière solution est aussi indiquée par Euler. (*Cal. int.*, t. II, prob. 96, p. 40). Tm.