NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ARISTIDE MARRE

Du binôme de Newton, antérieurement à Newton

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 488-496

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__488_0>

DU BINOME DE NEWTON,

Antérieurement à Newton.

PAR M. ARISTIDE MARRE.

—

Le théorème du binôme de *Newton*, c'est ainsi qu'on le dénomme ordinairement, n'appartient pas exclusivement à *Newton*. *Hutton* a émis cette vérité aujourd'hui reconnue, dans son Introduction à ses Tables mathématiques. Avant *Newton*, d'illustres géomètres, *Lucas de Burgo*, *Stifelius*, *Viète*, *Briggs* et *Pascal* avaient ouvert la voie. Ce qui seulement peut être accordé sans conteste au prince des Mathématiciens anglais, c'est l'extension du fameux théorème au cas des exposants fractionnaires.

M. *Ed. Biot* nous a appris (Journal des savants 1835) que la formation des coefficients des diverses puissances du binôme exprimées en nombres entiers était connue des Chinois au moins en 1593, car le *Souan Fa long Tsong* (principes de l'art du calcul) fut imprimé en cette année. Les Hindous très-vraisemblablement ne sont pas restés en arrière de leurs voisins chez lesquels on n'a pas encore trouvé, que je sache, un *Brahmagupta* ou un *Aryabhatta*; toutefois je ne saurais voir dans l'énoncé et dans la solution d'un problème traduit du sanscrit par M. *Reuben Burrow*, la preuve évidente que les Hindous connaissaient le théorème du binôme de *Newton* dans le cas de l'exposant entier et positif, tout aussi bien que *Briggs* et beaucoup mieux que *Pascal* (*). Ce sont là les pro-

(*) *Biographie universelle*, t. XXXI, p. 132. Notice sur *Newton* par *M. Biot* :

pres termes de M. *Reuben Burrow* (*). Voyons si le problème traduit du sanscrit peut justifier un pareil langage.

Énoncé : « Le palais d'un Radja avait huit portés ; or ces portes peuvent être ouvertes une à une, ou par deux à la fois, ou par trois à la fois, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin toutes soient ouvertes ensemble. On demande de dire les nombres de fois que ceci peut être fait ? »

Solution : « Écris le nombre des portes, et avance en ordre en diminuant successivement de *huit* jusqu'à l'unité, et alors dans l'ordre contraire comme il suit :

8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8

» Divise le premier nombre huit par l'unité au-dessous de lui, et le quotient huit montre le nombre de fois que les portes peuvent être ouvertes une par une. Multiplie ce dernier huit par le terme voisin sept et divise le produit par le deux qui est au-dessous, et le résultat vingt-huit est le nombre de fois que deux portes différentes peuvent être ouvertes ; multiplie le dernier nombre trouvé vingt-huit par la figure suivante, six, divise le produit par le trois au-dessous, et le quotient cinquante-six montre le nombre de fois que trois portes différentes peuvent être ouvertes. Et encore, ce cinquante-six multiplié par le cinq suivant et divisé par le quatre au-dessous est soixante-dix, nombre de fois que quatre portes différentes peuvent être ouvertes. De même, cinquante-six est le nombre de fois que cinq peuvent être ouvertes : vingt-huit le nombre de fois que six peuvent être ouvertes : huit le nombre de fois que sept peuvent être ouvertes, et enfin, *un*

Pascal, avant *Newton*, avait donné une règle pour former *directement* un terme quelconque du developpement des puissances binomiales, dans le cas où l'exposant de la puissance est un nombre entier.

(*) *Asiatic Researches*, 2[e] vol. Appendix, n° 5.

est le nombre de fois que toutes peuvent être ouvertes ensemble ; et la somme de toutes les différentes fois est 255 ». Ici finit la traduction du sanscrit. M. Reuben Burrow continue : « La démonstration est évidente pour les mathématiciens. En effet, le coefficient du second terme dans toute équation générale indiquant la somme des racines, il s'ensuit que dans la puissance n de $1+1$, où chacune des racines est l'unité, le coefficient indique les différentes *unités* qui peuvent être prises dans n choses : de même, attendu que le coefficient du troisième terme est la somme des produits différents de toutes les racines prises deux à deux, il s'ensuit que....., etc. » (*Lilavati*, section VI.)

D'abord nous dirons que l'on doit établir une distinction entre la règle des coefficients et la formule du binôme elle-même. D'autre part, si l'on veut rattacher cette question à l'une des théories des Hindous, il nous semble que pour la résoudre, ils ont suivi une route beaucoup moins détournée que celle qu'on leur attribue. Les Hindous connaissaient la théorie des combinaisons et des permutations, et nous avons, d'après M. *Burrow* lui-même, rapporté à ce sujet (*), une question particulière qui, si elle n'est pas d'une grande utilité pratique, a du moins le mérite de paraître curieuse à *M. Delambre* (**) Pour nous, la règle donnée précédemment par les Hindous, n'est qu'une simple conséquence ou plutôt une pure application de cette théorie. En effet, le nombre de fois que huit portes différentes peuvent être ouvertes une à une, est évidemment égal à 8 ou $\frac{8}{1}$. Le nombre de fois que huit portes peuvent être ouvertes deux à deux, ou le nombre de combinaisons de huit objets pris deux à deux, est

---

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome V, p. 57.
(**) *Histoire de l'Astron. anc.*, fin du tome I.

égal à $\frac{8.7}{1.2}$. Le nombre de fois que huit portes différentes, peuvent être ouvertes trois à trois, est égal à $\frac{8.7.6}{1.2.3}$; etc.

En faisant la somme, les Hindous furent amenés à cette remarque bien naturelle que pour passer du premier terme (nombre des portes) au second, il fallait multiplier par 7 voisin de 8, et diviser le produit par 2, au-dessous de 7 et qui marquait son rang; — que pour passer du second terme au troisième, il fallait multiplier par le chiffre suivant 6, et diviser par le nombre au-dessous de 6, c'est-à-dire 3 qui marquait son rang et ainsi de suite. Arrivés à la dernière expression de forme fractionnaire, un simple coup d'œil jeté sur ce double rang de chiffres dicta aux Hindous la règle qu'ils ont donnée. — Cette explication admise, nous répéterons avec M. *Plaifair d'Édimbourg*, que ce problème prouve que les Hindous ont tourné leur attention vers certaines investigations arithmétiques dont il n'existe aucune trace dans les écrits des mathématiciens grecs, mais nous croirons avoir justement démontré qu'on n'en doit pas conclure avec M. *Reuben Burrow* que les Hindous connaissaient le théorème du binôme de *Newton* dans le cas de l'exposant entier et positif, au moins aussi bien que *Briggs* et beaucoup mieux que *Pascal*.

Nous allons prouver maintenant que longtemps avant *Briggs*, les Arabes connaissaient la règle pour engendrer les coefficients des termes du développement d'une puissance entière et positive du Binôme, successivement les uns des autres et indépendamment de ceux de toute autre puissance. Cette règle se trouve dans deux de leurs ouvrages arithmétiques, dans le *Meftehal Hisàb*, ou Clef du calcul, composé par *Djoumshid ben Moussaoud* sous le règne de *Oulough Beg*, petit-fils de *Timour*, et dans l'*Ayoun al Hisàb*, ou Règles du calcul, composé par *Mohammed Bakir* sous le règne de *Shah Abbas I*, vers l'an 1600. Ces deux ouvrages sont peu ou point connus, M. J. *Tytler* qui le premier a révélé leur existence n'a pu se procurer dans l'Inde qu'un simple extrait de chacun d'eux, et il n'a fait connaître que le fragment de l'*Ayoun al Hisàb*, qui donne la règle de la formation des coefficients. C'est ce fragment que nous allons reproduire :

« Observe que les *Radices Locorum* (coefficients) de toute puissance sont des nombres qui sont placés vis-à-vis du *latus primum* (la racine ou la première puissance) et des puissances antécédentes (*i. e.* dont les indices sont moindres que celui de la puissance dont les coefficients sont demandés) ; la méthode pour les découvrir est comme il suit : — Écris les noms de la racine et de la puissance antécédente ou inférieure à celle donnée en un rang de longueur (*i. e.* en un rang du haut en bas de la page), prends le nombre indice de cette puissance donnée et place-le vis-à-vis du nom de la racine, alors retranches-en *un*, multiplie $\frac{1}{2}$ du reste par le nombre qui est placé vis-à-vis de la racine ou inversement (*i. e.* ou multiplie le reste par la moitié de ce qui est placé vis-à-vis de la racine), et place le produit vis-à-vis du nom du carré; alors retranche 2 (de l'indice de la puissance donnée) et multiplie $\frac{1}{3}$ du reste par ce qui est placé vis-à-vis du carré ou inversement, et place le produit vis-à-vis du cube; alors retranche 3 et multiplie $\frac{1}{4}$ du reste par ce qui est placé vis-à-vis du cube ou inversement, et place le produit vis-à-vis de la quatrième puissance, et ainsi de suite jusqu'à la fin; par une conséquence nécessaire le même nombre sera trouvé dans toute place équidistante de celle du milieu, ou des deux qui occupent le milieu; c'est pourquoi, si tu l'aimes mieux, écris la première figure trouvée, aussi à la dernière place (dans le cas actuel), ce qui est écrit vis-à-vis de la racine et du carré peut être écrit vis-à-vis de la quatrième puissance et du cube, et ainsi de suite jusqu'à ce que ce soit complété. Par exemple, qu'il soit requis de trouver les coefficients de la douzième puissance. Écrivons depuis la racine jusqu'à la onzième puissance, ainsi qu'il a été enseigné, et écrivons 12 qui est l'indice de la puissance donnée vis-à-vis de la racine et à la dernière place, retranchons-en 1, et multiplions ce reste par $\frac{1}{2}$ de 12, et écrivons 66 le produit vis-à-vis du carré et à l'avant-dernière place; retranchons 2 et multiplions 10 qui est le reste par $\frac{1}{3}$ de ce qui a été écrit vis-à-vis du carré, et écrivons le produit qui est 220 vis-à-vis du cube et à cette place qui lui correspond (*i. e.* équidistante du milieu de l'autre côté); alors retranchons 3 et multiplions 9 le reste par $\frac{1}{4}$ de ce qui est opposé au cube, et écrivons le produit, qui est 495, vis-à-vis de la quatrième puissance et de sa correspondante; alors retranchons 4 et multiplions 8 le reste, par $\frac{1}{5}$ de ce qui est vis-à-vis de la quatrième puissance, et écrivons le produit, qui est 792, vis-à-vis de la cinquième puissance et de la correspondante; alors retranchons 5 et multiplions 7 le reste par $\frac{1}{6}$ de ce qui est vis-à-vis de la cinquième puissance, et écrivons le produit, qui est 924, vis-à-vis de la sixième puissance; ces nombres ainsi écrits sont les coefficients de la douzième puissance, en voici la table :

NOMS DES PUISSANCES PRÉCÉDANT LA PUISSANCE DONNÉE.	NOMS des COEFFICIENTS.
Racine (1re puissance).	12
Carré.	66
Cube.	220
Quatrième puissance.	495
Cinquième puissance.	792
Sixième puissance.	924
Septième puissance.	792
Huitième puissance.	495
Neuvième puissance.	220
Dixième puissance.	66
Onzième puissance.	12

» D'où il suit que cette puissance de tout nombre est égale à la somme des puissances de ses deux parties; et 12 fois chacune de ces parties multipliée par la onzième puissance de l'autre; et 66 fois le carré de chacune d'elles par la dixième puissance de l'autre; et 220 fois le cube de chacune d'elles par la neuvième puissance de l'autre; et 495 fois la quatrième puissance de chacune d'elles par la huitième puissance de l'autre; et 792 fois la cinquième puissance de chacune d'elles par la septième puissance de l'autre; et 924 fois la sixième puissance de l'une d'elles par la sixième puissance de l'autre, et ainsi des des autres cas. »

Note. Il est remarquable qu'en Europe les coefficients binomiaux ont été indiqués pour les extractions des racines avant de l'avoir été pour l'élévation aux puissances; la première indication se trouve dans l'arithmétique du célèbre

Stifel, cité ci-dessus. Voici le titre de l'ouvrage : *Arithmetica integra, authore Michaele Stifelio*; Norimb. ap. Joh. Petreium, 1544, in-4. de 322 pages. Il y a une préface du célèbre théologien Philippe Melanchthon qui recommande l'arithmétique parce qu'elle forme l'esprit et l'accoutume à prendre plaisir à la vérité et à la certitude. Le premier livre du cinquième chapitre *De extractionibus radicum* contient une section intitulée : *De inventione numerorum qui peculiariter pertinent ad suas species extractionum.* C'est une table formée de colonnes qui contiennent les nombres qu'on appelle aujourd'hui coefficients binomiaux. En voici la formation :

Primo a latere sinistro descendit naturalis numeror. progressio, quam extendere poteris quantum volueris. Et illa radix est sequentium laterum omnium. Nam secundum latus quod continet numeros trigonalium sic oritur ex primo latere : Duobus (*) *cellis de primo latere obmissis, repetitur numerus cellulæ tertiæ in primo latere, atque ab eodem numero incipit latus secundum videlicet circam tertiam cellulam primi lateris. Deinde ex additione amborum illor. (id est ex tertio primi lateris, et primo termino secundi lateris) fit numerus secundus secundi lateris. Sic ex secundo numero secundi lateris, et ex suo collaterali fit tertius numerus secundi lateris, et ex tertio, et suo collaterali fit quartus. Et sic deinceps in infinitum fieri potest descensus. Quemadmodum autem nascitur secundum latus ex latere primo, ita nascitur latus tertium ex latere secundo, et eodem modo nascitur latus quartum ex latere tertio, et quintum ex quarto : et sic deinceps, ut in tabula omnia hæc exemplariter vides. Certe admodum mirandum est talia contineri sub numerorum vicibus.*

D'après cette description, il est évident que le triangle de Pascal appartient à Stifel. Il se sert même de cette table, pour construire, à son insu, les termes binomiaux, mais rien qu'en vue de l'extraction des racines : *Cui speciei quilibet ordo transversaliter progrediens serviat, subindicat ordinis illius numerus primus, notum est enim 2 subindicare quadratum.* Ainsi pour l'extraction de la racine huitième, il dit :

Ex ordine illo 8. 28. 56 .70. *sumuntur numeri qui serviant extractioni Zensizenzensicæ. Primo recipiuntur ex ordine quo ponantur. Deinde repetuntur omnes retrogrado excepto ultimo. Erunt ergo septem numeri videlicet*

(*) Il faut *duabus*.

8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. *et cuilibet eorum præpono suas cifras. Recipit autem quilibet eorum pro se cifram unam, et pro quolibet sequenti numero etiam unam recipit. Ut* 8 *septem cifras, unam pro se et reliquas sex pro reliquis sex numeris sequentibus : sic secundus numerus, id est* 28, *recipit sex cifras, unam pro se et alias quinque pro numeris quinque sequentibus : sic tertius, id est* 56 *recipit quinque, et quartus est* 70 *recipit quatuor, et sic deinceps, quemadmodum vides eos hic esse positos :*

80000000
28000000
5600000
700000
56000
2800
80

C'est tout ce qu'il dit de l'extraction de la racine huitième, il en résulte clairement qu'il avait le sentiment du binôme et le formait même ; aussi Kästner, dont nous avons extrait ce qui précède, dit avec raison que Stifel connaissait le théorème binomial *virtualiter*, mais non *formaliter* (Geschichte der Mathematik, t. I, p. 128, 1796). On peut en dire autant de la théorie des logarithmes. Ainsi, dans le 4^{me} chapitre du 1er livre, où il traite des progressions géométriques, on lit : *Sequitur utilis tractatio ut progressioni arithmeticæ respondeat geometrica progressio.* Il montre l'usage qu'on peut faire de cette correspondance, pour changer la multiplication et la division en addition et soustraction ; les élévations aux puissances et extractions de racines en multiplication et division, et donne des exemples. Il dit la chose et ne se sert pas du mot *puissance*, mais il emploie le mot *exposant* dans le même sens que nous. Ainsi, dans une équation où un zensicube doit être égal à un sursolide plus 35156 bicarrés ; il dit que les *exposants* sont 6, 5, 4. Cet homme de génie né à Eslingen en 1509, et pasteur de l'église de Holsdorf, a enseigné en Saxe, en Prusse et en diverses villes de France et d'Italie, et est mort à Iéna en 1567. Il a publié une arithmétique en allemand, Norimb., 1545, in-4°, et un livre de calcul (Rechenbuch) sur la pratique italienne et allemande, Nuremb., 1546, in-4°.