

E. LIONNET

Solution du problème 95

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 449-451

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__449_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 95 (t. IV, p. 260).

PAR M. E. LIONNET,

Professeur au Collège royal de Louis le Grand.

Étant donnés n points A, B, C, D... situés comme on voudra dans un plan, décrire le plus petit cercle qui contienne ces n points. (Fig. 44.)

1. Dans le plan qui contient tous les points donnés, traçons une droite quelconque MN; menons, à cette droite, les perpendiculaires Aa, Bb, Cc... Du point A, situé sur l'une des perpendiculaires extrêmes, menons des droites AB, AC, AD... aux $n-1$ autres points B, C, D... et supposons que AB soit, de toutes ces droites, celle qui fait avec Aa le plus petit angle Baa; tous les points du système seront situés d'un même côté de la direction AB. Supposons, de même, que BC soit, de toutes les droites menées du point B aux $n-1$ autres points, celle qui fait, avec le prolongement BH de AB, le plus petit angle CBH et ainsi de suite : nous obtiendrons ainsi un polygone convexe ABCD, par exemple, qui contiendra tous les points du système; ce qui ramène le problème au suivant : *décrire le plus petit cercle qui contienne tous les sommets d'un polygone convexe.*

2. *La circonférence du cercle minimum passe par un, au moins, des sommets du polygone donné ABCD. (Fig. 45.)*

Car, en supposant tous les sommets A, B, C, D, intérieurs au cercle demandé, qui a pour centre le point O, le cercle décrit de ce point O, comme centre, avec un rayon égal à la plus grande des droites OA, OB, OC... serait plus petit que

le cercle minimum et contiendrait tous les sommets du polygone.

3. *La circonférence du cercle demandé passe par deux, au moins, des sommets du polygone. (Fig. 46.)*

Supposons qu'elle passe par le seul point A. Les prolongements des droites OB, OC, OD rencontreront la circonférence en des points B', C', D' et, si l'on prend, sur OA, une quantité OO' plus petite que chacune des droites BB', CC', DD', le triangle OBO' donnera $O'B < OB + OO'$; or $OO' < BB'$, donc $O'B < OB + BB'$, ou $O'B < OB'$; par la même raison, $O'C < OC'$ et $O'D < OD'$; d'ailleurs $OB' = OC' = OD' = OA$, donc tous les sommets du polygone seraient intérieurs au cercle décrit du point O', comme centre, avec un rayon égal à OA; donc le cercle OA n'est pas un minimum (2).

4. Cela étant, proposons-nous de trouver le centre et le rayon du cercle minimum parmi ceux dont la circonférence passe par deux sommets A et B du polygone ABCD et qui contiennent tous les autres sommets. (Fig. 47.)

Élevons des perpendiculaires MN, PQ, RS sur les milieux de AB et des droites BC, AD qui joignent les autres sommets du polygone à l'un des points A et B; et soient O, O' les points de rencontre de MN avec les droites PQ, RS. Toute circonférence, qui passe par les points A et B, a son centre sur la droite MN et, pour que le point C ne soit pas extérieur au cercle, il faut que la distance du centre à ce point n'excède pas le rayon, ce qui exige que ce centre soit situé sur PQ ou du même côté de cette droite que le point C; donc ce rayon ne peut être moindre que OB. On voit, de même, que le rayon d'une circonférence, qui passe par les points A et B, doit être au moins égal à O'A ou à O'B pour que le point D ne soit pas extérieur au cercle; or $O'B < OB$, donc le cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon égal à OB, est un minimum parmi ceux dont la circonférence passe par les

points A et B et qui contiennent tous les sommets du polygone : on trouvera de la même manière le centre et le rayon du cercle minimum, dont la circonférence passe par deux autres sommets quelconques A et C, A et D, B et C... et le plus petit de tous ces cercles satisfera un problème.

COROLLAIRE 1. Parmi tous les cercles, qui contiennent les sommets d'un triangle rectangle ou acutangle, le cercle circonscrit au triangle est un minimum.

COROLLAIRE 2. Parmi tous les cercles, qui contiennent les sommets d'un triangle obtusangle, le cercle décrit sur le plus grand côté comme diamètre est un minimum.

COROLLAIRE 3. Parmi tous les cercles qui contiennent les sommets d'un parallélogramme, le cercle décrit sur la plus grande diagonale comme diamètre est un minimum.

COROLLAIRE 4. Parmi tous les cercles, qui contiennent les sommets d'un polygone régulier, le cercle circonscrit au polygone est un minimum.

Remarque. On déterminera, d'une manière analogue, le centre et le rayon de la plus petite sphère qui contienne n points donnés comme on voudra dans l'espace (*).