

**Théorie analytique de la méthode perspective
et application à la perspective circulaire
des coniques. D'après M. Jacobi**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 419-429

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__419_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE ANALYTIQUE

*de la méthode perspective et application à la perspective
circulaire des coniques.*

D'après M. Jacobi (Crelle, t. VIII, p. 338, 1832.)

—

Lemme.

$$1. \text{ Soit } x = \frac{\beta - \beta's - \beta''t}{\alpha - \alpha's - \alpha''t}; \quad y = \frac{\gamma - \gamma's - \gamma''t}{\alpha - \alpha's - \alpha''t}; \quad (1)$$

$$\text{on en déduit } s = \frac{a' - b'x - c'y}{a - bx - cy}; \quad t = \frac{a'' - b''x - c''y}{a - bx - cy}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} [\beta'\gamma''] &= a; & [\alpha'\gamma''] &= b; & [\beta'\alpha''] &= c; \\ [\beta\gamma'] &= a'; & [\alpha\gamma'] &= b'; & [\beta\alpha'] &= c'; \\ [\gamma\beta'] &= a''; & [\gamma\alpha'] &= b''; & [\alpha\beta'] &= c''; \end{aligned} \quad (3)$$

où le crochet indique un binôme alterné, par exemple ,

$$[\beta'\gamma''] = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma';$$

et ainsi des autres. Considérant les équations (2), on a de même :

$$\begin{aligned} [b'c''] &= \alpha; & [a'c''] &= \beta; & [b'a''] &= \gamma; \\ [bc''] &= \alpha'; & [ac''] &= \beta'; & [ba''] &= \gamma'; \\ [cb'] &= \alpha''; & [ca'] &= \beta''; & [ab'] &= \gamma''; \end{aligned} \quad (4)$$

et faisons $ax - b\beta - c\gamma = e;$

on a :
$$\begin{aligned} a\alpha' &= b\beta' + c\gamma'; & ax'' &= b\beta'' + c\gamma''; \\ ac &= \alpha'c' + \alpha''c''; & ab &= \alpha'b' + \alpha''b''. \end{aligned}$$

Méthode perspective.

2. Soient x, y les coordonnées d'un point M d'un plan rapporté à des axes coordonnés x, y ; et s, t les coordonnées d'un autre point m situé dans un autre plan et rapporté à des axes s, t ; supposons que les deux points M et m sont assujettis à se trouver sur une droite passant par un point fixe O, situé dans l'espace; en prenant le plan s, t pour *tableau* et le point O pour la position de l'œil, m sera la perspective de M; s et t sont évidemment des fonctions de x et de y , et des fonctions du 1^{er} degré, puisque OM ne peut percer le plan du tableau qu'en un point; donc ces fonctions sont de la forme indiquée dans le lemme.

Les neuf constantes $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ dépendent de la position du tableau, des axes des s, t sur ce tableau et de la position de l'œil. Une de ces constantes peut être prise arbitrairement.

Nous supposons qu'on la prenne telle que l'expression c devienne égale à l'unité.

3. *Problème.* Les constantes $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ étant données, trouver la position de l'œil, celle du tableau, celle des axes s, t dans ce tableau?

Solution. Construisons les droites

$$b'x + c'y = a'; \quad b''x + c''y = a'';$$

soit A leur point d'intersection et P la perspective de A; il est évident que ce point P est l'origine des s, t ; puisque $s=0$; $t=0$.

Construisons les droites $bx + cy = a$; $b''x + c''y = a''$; soit A' le point d'intersection, la perspective de A' est à l'infini; ou la droite OA' est parallèle à l'axe des s ; construisant de même les droites $bx + cy = a$, $b'x + c'y = a'$; la perspective du

point A'' d'intersection est à l'infini et la droite OA'' est parallèle avec l'axe des t ; le triangle $AA'A''$ est complètement déterminé; les coordonnées de

$$A \text{ sont } \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha},$$

$$A' \text{ sont } \frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\gamma'}{\alpha'},$$

$$A'' \text{ sont } \frac{\beta''}{\alpha''}, \frac{\gamma''}{\alpha''};$$

le plan $OA'A''$ est parallèle à celui du tableau; et si l'angle des s, t est droit, il s'ensuit que le point O est sur une sphère décrite sur $A'A''$ comme diamètre.

Le plan du tableau, celui des s, t coupe celui des x, y suivant une droite parallèle à $A'A''$; donc l'équation de cette droite sur le plan xy est $a - bx - cy = d$; l'équation de cette même droite sur le tableau, en remplaçant x, y par leurs valeurs, est $d(\alpha - \alpha's - \alpha''t) = e = 1$;

cette droite coupe les axes s et t en deux points B et B' ; et le triangle PBB' est semblable au triangle OAA' ; mais

$$PB' = \frac{\alpha d - 1}{d\alpha'}; \quad PB'' = \frac{\alpha d - 1}{d\alpha''}; \quad \frac{PB'}{PB''} = \frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{OA'}{OA''};$$

abaissions de O une perpendiculaire OA''' sur $A'A''$; l'angle en O étant droit, on a :

$$\frac{A'A'''}{A''A'''} = \frac{\overline{OA'}^2}{\overline{OA''}^2} = \frac{\alpha'^2}{\alpha''^2}.$$

On a trouvé ci-dessus les coordonnées de A' et de A'' ; donc les coordonnées de A''' sont :

$$\frac{\alpha'\beta' + \alpha''\beta''}{\alpha'^2 + \alpha''^2}; \quad \frac{\alpha'\gamma' + \alpha''\gamma''}{\alpha'^2 + \alpha''^2};$$

d'où, en prenant rectangulairement les axes x, y ,

$$\begin{aligned}
 A'A''' &= \frac{\alpha''}{\alpha'(\alpha'^2 + \alpha''^2)} \sqrt{b^2 + c^2}; \\
 A''A''' &= \frac{\alpha'}{\alpha''(\alpha'^2 + \alpha''^2)} \sqrt{b^2 + c^2}; \\
 A'A'' &= \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\alpha'\alpha''}; \quad OA''' = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\alpha'^2 + \alpha''^2};
 \end{aligned}$$

donc le point O est sur un cercle dont on connaît le centre A''', dont le plan est perpendiculaire à A'A''' et dont le rayon OA''' est connu.

Le point B' est sur la droite AA' et sur la droite BB'; ses coordonnées sont connues par les équations

$$b''x + c''y = a'' \quad \text{et} \quad bx + cy = a - d;$$

d'où l'on déduit pour les coordonnées de B' :

$$\frac{\beta'' - c'd}{\alpha'}, \quad \frac{\gamma' + b'd}{\alpha'};$$

et de même pour les coordonnées de B'',

$$\frac{\beta' + c'd}{\alpha''}, \quad \frac{\gamma'' - b'd}{\alpha''};$$

d'où

$$B'B'' = \frac{ad-1}{\alpha'\alpha''} \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{\frac{PB'^2 + PB''^2}{\alpha'^2 + \alpha''^2}} = \frac{ad-1}{da'\alpha''} \sqrt{\alpha'^2 + \alpha''^2};$$

et de là
$$d = \sqrt{\frac{\alpha'^2 + \alpha''^2}{b^2 + c^2}};$$

ainsi la droite d'intersection B'B'' du plan du tableau avec le plan xy est complètement déterminée ; mais l'inclinaison du plan du tableau reste arbitraire et ne dépend pas des neuf quantités $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$; et la position de l'œil n'est pas non plus complètement déterminée ; il suffit qu'il se trouve sur une circonférence déterminée, mais la position O de l'œil étant donnée, on a aussi l'inclinaison du plan du tableau ; puisque le plan est parallèle au plan OA'A''.

La détermination des points A, A', A'' exige six données ; celle du point A''' sur la droite A', A'', exige une septième, et enfin le rayon OA''' une huitième parmi les neuf quantités $\alpha, \beta, \dots, \gamma'''$, et l'on a de plus la condition $e=1$.

Avant de passer aux coniques, il faut expliquer quelques termes que M. Poncelet a introduits dans la science.

Sécantes et cordes idéales.

4. Deux courbes algébriques situées dans le même plan, l'une du degré m et l'autre du degré n , se coupent en mn points, déterminés chacun par deux coordonnées ; supposons qu'il y ait r points réels et $2s$ points imaginaires ; de sorte qu'on a $mn=r+2s$; soient x', y' et x'', y'' les coordonnées de deux de ces points ; la sécante qui passe par ces points a pour équation $y(x'-x'') + x(y''-y') = x'y'' - y'x''$; le carré de la corde interceptée a pour longueur $(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2$

et les coordonnées du milieu de la corde sont $\frac{1}{2}(x'+x'')$,

$\frac{1}{2}(y'+y'')$; en combinant ensemble deux points, coordonnées réelles, ces trois expressions sont réelles ; on a donc $\frac{r(r-1)}{2}$ sécantes réelles, autant de cordes et autant de points

milieux ; en combinant un point réel avec un point imaginaire, les trois expressions deviennent imaginaires ; on a donc $2rs$ sécantes imaginaires autant de cordes et de points milieux ; combinons les points imaginaires ; soient

$$x' = \alpha + \beta i, \quad y' = \gamma + \delta i, \quad x'' = \alpha' + \beta' i, \quad y'' = \gamma' + \delta' i,$$

ou

$$i = \sqrt{-1} ;$$

l'équation de la sécante prend la forme

$$y(\alpha - \alpha') + x(\gamma' - \gamma) + \beta\delta' - \beta'\delta + \alpha'\gamma - \alpha\gamma' =$$

$$= i[\gamma(\beta' - \beta) + x(\delta - \delta') + \beta\gamma' - \gamma\beta' + \alpha\delta' - \alpha'\delta],$$

lorsque les racines sont conjuguées, alors $\alpha = \alpha', \gamma = \gamma', \beta = -\beta', \delta = -\delta'$, et l'équation se réduit à $\beta\gamma - \delta x = \beta\gamma - \alpha\delta$ droite réelle; et comme elle a une même origine *analytique* que les sécantes réelles, M. Poncelet l'a nommée *sécante idéale*, mais dont l'existence est réelle; on aurait peut-être pu la désigner sous le nom de sécante *commune analytique*, pour la distinguer d'une sécante géométrique; il existe donc entre les deux courbes s sécantes communes analytiques; et les autres points imaginaires donnent encore $2s(s-1)$ sécantes imaginaires; ainsi en récapitulant on a, $r \frac{(r-1)}{2}$ sécantes *réelles*; s sécantes *idéales* et $2s(r+s-1)$ sécantes *imaginaires*.

L'expression analytique de la corde est

$$\begin{aligned} & (\alpha' - \alpha)^2 + (\gamma' - \gamma)^2 + i [2(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') + 2(\gamma - \gamma')(\delta - \delta')] \\ & - (\beta - \beta')^2 \\ & - (\delta - \delta')^2 \end{aligned}$$

Pour les racines conjuguées cette expression se réduit à $-4(\beta^2 + \delta^2)$; on la nomme pour la même raison donnée ci-dessus, *carré de la corde idéale*; il est essentiellement négatif et $\sqrt{\beta^2 + \delta^2}$ est ce qu'on nomme la moitié de la corde idéale; les points milieux des cordes idéales, sont réels et ont pour coordonnés α et γ .

Il est utile de remarquer que le point déterminé par les coordonnées

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y'} + \frac{1}{y''} \right),$$

est réel et en général un point est réel lorsque ses coordonnées sont des fonctions symétriques d'intersections imaginaires conjuguées; de là on conclut que la projection conique d'une *sécante idéale* est la *sécante idéale* des deux projections.

Il est bien entendu qu'il peut y avoir des sécantes idéales doubles, triples, etc., c'est-à-dire des tangentes communes idéales, des osculations de divers degrés idéales, etc., selon que l'équation en mn a des racines imaginaires doubles, triples, etc.

Pour deux coniques on peut avoir :

$r=4$; $s=0$; alors il y a six sécantes communes réelles.
 $r=2$; $s=1$; une sécante réelle ; une sécante idéale, quatre sécantes imaginaires.
 $r=0$; $s=2$; point de sécante réelle ; deux sécantes idéales ; quatre sécantes imaginaires.

Observation. Si une des deux lignes qui sont dans un même plan est une droite, les $\frac{r(r-1)}{2}$ secantes réelles et les s sécantes idéales se réduisent évidemment à une seule droite ; mais il y a $\frac{r(r-1)}{2}$ cordes réelles et s cordes idéales et autant de points milieux de cordes idéales.

Perspective circulaire des coniques.

5. *Problème.* Étant donnée une conique la projeter perspectivement de manière que la perspective devienne un cercle.

Solution. Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, l'équation de la conique ; menons dans son plan une droite qui ne la rencontre pas ; soit $a - bx - cy = 0$, l'équation de cette droite, il suffit que $lb^2 - 2bcn + lc^2 + ma^2 - 2abk - 2ack < 0$. (*Voyez t. II, p. 108.*)

Les coordonnées des points d'intersection, sont imaginaires et l'on aura :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\beta' + i\beta''}{\alpha' + i\alpha''} ; & y' &= \frac{\gamma' + i\gamma''}{\alpha' + i\alpha''} ; \\ x'' &= \frac{\beta' - i\beta''}{\alpha' - i\alpha''} ; & y'' &= \frac{\gamma' - i\gamma''}{\alpha' - i\alpha''} . \end{aligned}$$

On prend arbitrairement les six quantités $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma''$, qui seront données en fonction des coefficients de l'équation de la conique et de a, b, c ;

d'ailleurs

$$\begin{aligned} a &= [\beta' \gamma''] \\ b &= [\alpha' \gamma''] \\ c &= [\beta' \alpha''] \end{aligned}$$

le point milieu de la corde idéale a pour coordonnées:

$$\frac{\alpha' \beta' + \alpha'' \beta''}{\alpha'^2 + \alpha''^2}, \quad \frac{\alpha' \gamma' + \alpha'' \gamma''}{\alpha'^2 + \alpha''^2};$$

et la moitié de la corde idéale est

$$\frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\alpha'^2 + \alpha''^2}.$$

Substituant les valeurs de x' et de y' ou de x'' , y'' , dans l'équation de la conique et égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie affectée de i , on obtient :

$$F(\alpha'^2 - \alpha''^2) + C(\beta'^2 - \beta''^2) + A(\gamma'^2 - \gamma''^2) + B(\beta' \gamma' - \beta'' \gamma'') + D(\alpha' \gamma' - \alpha'' \gamma'') + E(\alpha' \beta' - \alpha'' \beta'') = 0, \quad (1)$$

$$2F\alpha' \alpha'' + 2C\beta' \beta'' + 2A\gamma' \gamma'' + B(\beta' \gamma'' + \gamma' \beta'') + D(\gamma' \alpha'' + \alpha' \gamma'') + E(\alpha' \beta'' + \beta' \alpha'') = 0. \quad (2)$$

Donnons maintenant aux six quantités $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ la même signification que dans le problème 3; on a :

$$x = \frac{\beta - \beta' s - \beta'' t}{\alpha - \alpha' s - \alpha'' t}; \quad y = \frac{\gamma - \gamma' s - \gamma'' t}{\alpha - \alpha' s - \alpha'' t}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la conique on aura l'équation de sa perspective sur le plan de s, t où nous supposons les axes rectangulaires; pour que cette perspective devienne un cercle, il faut écrire les relations connues, savoir que le coefficient de s^2 soit égal à celui de t^2 et que le coefficient de st soit nul; ce qui donne précisément les relations (1) et (2); la droite désignée par $A'A''$ est celle qui a pour équation

$$a - bx - cy = 0;$$

c'est la sécante idéale, et qui se projette perspectivement à l'infini ; les coordonnées du point milieu de la corde idéale, ce sont celles du point A'' ; et la moitié de la corde idéale est le rayon du cercle sur lequel se trouve l'œil O . Ainsi pour que la conique projetée devienne un cercle, on mène une sécante idéale ; on détermine le milieu et la grandeur de la demi-corde idéale ; par ce milieu, on mène un plan perpendiculairement à la sécante idéale ; et dans ce plan, du même point milieu comme centre, et d'un rayon égal à la demi-corde idéale, on décrit une circonférence, sur laquelle on prend un point quelconque pour position de l'œil ; en prenant pour tableau un plan parallèle à celui qui passe par l'œil et la sécante idéale, la perspective de la conique sera un cercle sur ce tableau.

Problème. Deux coniques étant situées dans le même plan, les projeter de manière à ce que leurs perspectives deviennent des cercles ?

Solution. Si les coniques se coupent en quatre points, elles n'ont pas de corde idéale commune et le problème est évidemment impossible ; puisque les deux cercles perspectifs ne peuvent se couper qu'en deux points. Il faut donc que les deux coniques se coupent, aient seulement deux points ou aucun point en commun. Alors elles ont au moins une corde idéale en commun (4) ; on résout le problème par rapport à l'une de ces coniques et cette droite comme précédemment (5) ; et la seconde conique se projettera aussi suivant un cercle.

Remarque. On ne peut construire la sécante idéale commune géométriquement, que lorsque l'équation du quatrième degré résultat de l'élimination entre les équations de deux coniques se décompose en deux facteurs rationnels du second degré (Voir Durville, t. IV, p. 338). Mais les perspectives

cycliques des deux coniques sont toujours analytiquement possibles.

Si l'on a $B = D = E = 0$; l'équation de la conique $Ay^2 + Cx^2 + F = 0$ est rapportée à des diamètres conjugués; faisons $c=0$; alors la sécante idéale est parallèle à l'axe des y ; on trouvera :

$$\alpha' = 1, \alpha'' = 0, \beta' = \frac{b}{a}, \beta'' = 0, \gamma' = 0, \gamma'' = \frac{\sqrt{AFb^2 + ACa^2}}{Ab^2}.$$

Les coordonnées du point milieu de la corde idéale sont $\beta'' = \frac{a}{b}$ et 0; donc ce point milieu est l'intersection de la sécante idéale avec l'axe des x .

La corde idéale se réduit à γ'' , ou à la valeur que prend γ en substituant $\frac{a}{b}$ dans l'équation $Ay^2 - Cx^2 - F = 0$; ce qui donne la construction suivante : on mène un diamètre parallèle à la sécante idéale, le point d'intersection de cette sécante avec le diamètre conjugué est le point milieu de la corde idéale, et construisant avec les mêmes diamètres conjugués une hyperbole, si la conique donnée est une ellipse et *vice versa*; la moitié de la corde interceptée est la grandeur de la corde idéale, et pour trouver la corde commune idéale de deux coniques il faut recourir à la conique auxiliaire dite *lieu de centre* (Voyez t. IV, p. 480). Telles sont les constructions dont se sert M. Poncelet, qui a créé la théorie géométrique des sécantes idéales (*Prop. projectives*, p. 60). Dans le mémoire que nous extrayons, M. Jacobi a donné *transitoirement* la théorie analytique de ces *sécantes* : le but principal est de réduire l'intégration de la fraction différentielle

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{l + m \cos^2 \varphi + n \sin^2 \varphi + 2l' \cos \varphi \sin \varphi + 2m' \sin \varphi + 2n' \cos \varphi}}$$

à une intégration de la fraction différentielle

$$\frac{dz}{\sqrt{L - M \cos z}};$$

après avoir employé d'admirables transformations analytiques, l'illustre analyste fait voir qu'on atteint directement ce but, en faisant usage du problème de perspective qu'on vient de lire. A cette occasion il dit : « Neque consensus ille »
» quæstionis geometricæ et analyticæ tam singularis videri »
» debet. Nam cum certis quibusdam configurationibus certæ »
» expressiones analyticæ respondeant, ubi per projectionem »
» sive aliud quod libet instrumentum geometricum configu- »
» rationem datam ad simpliciores vel magis regularem re- »
» vocas, simul expressiones analyticas, quibus configuratio »
» continetur, per substitutiones idoneas, quæ instrumenti geo- »
» metrici locum tenent, in simpliciores transformatas habere »
» debes. E qua observatione haud rarò ab elementis geome- »
» tricis ad graviores quæstiones analyticas transitum petere »
» licet, qualem antecedentibus indigitavimus. » (*Crelle*, t. VIII, p. 337). De là la nécessité, même pour les progrès de l'analyse, de cultiver surtout la géométrie contemporaine