P. Lafitte

Théorème sur les fractions périodiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 397-399
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__397_1>

THÉORÈME

Sur les fractions périodiques.

PAR M. P. LAFITTE,

Elève en élémentaires (college Henri IV, classe de M. Meissas)

—

Théorème. Une fraction irréductible à dénominateur nombre premier absolu, et réduite en fraction décimale, donne une période à nombre pair de chiffres; la première moitié ajoutée à la seconde moitié donne une somme qui ne contient que des 9.

Démonstration. Soit $\frac{m}{p}$ la fraction irréductible, p un nombre premier absolu, et $2n$ le nombre de chiffres de la période. Soit M la première moitié de la période, à gauche, et N la seconde moitié, à droite; ainsi la période est égale à $M.10^n+N$, et, d'après la théorie connue,

$\frac{m}{p}=\frac{M.10^n+N}{10^{2n}-1}$; d'où $m.10^n+1.10^n-1=p[M.10^n+N]$;

Or p est premier avec m et aussi avec $10^n - 1$; car p étant un nombre premier et la période étant de $2n$ chiffres, la première puissance de 10, qui laisse un pour reste, est 10^{2n}; donc p divise $10^n + 1$; par conséquent

$$M.10^n + N = M.(10^n - 1) + M + N$$

est divisible par $10^n - 1$. Il faut donc que $M + N$ soit divisible par $10^n - 1$; mais la plus haute valeur de M ou de N est $10^n - 1$, et les deux nombres sont inégaux : la somme est donc moindre que $2.10^n - 1$; donc $M + N = 10^n - 1$. C. Q. F. D.

Corollaire II. Dans la réduction en décimales, il suffit donc de calculer la moitié de la période, à gauche, et on en conclut, par une simple soustraction, l'autre demi-période.

Corollaire II. 10^n+1 est divisible par p ; donc $m.10^n+m-p$ est un multiple de p ; donc $m.10^n$ divisé par p laisse pour reste $p - m$, ou simplement $-m$. Ainsi quand, dans l'opération, on sera parvenu au reste $-m$, on aura la première demi-période.

Théorème. Lorsqu'en réduisant en fraction décimale $\frac{m}{p}$, on parvient à un reste $-m$, le nombre des chiffres de la période est nécessairement pair.

Démonstration. Soit n le nombre des chiffres de la période ; de sorte que $m.10^n - m$ est un multiple de p ; et, par hypothèse, on a $m.10^k + m$, aussi un multiple de p ; donc $10^k + 1$ est multiple de p, ou, ce qui revient au même, 10^k est un multiple de p, ce multiple étant diminué de 1 ; aussi 10^{2k} est un multiple de p, ce multiple étant augmenté de 1 ; ou bien $10^{2k}-1$ et aussi $m.10^{2k}-m$ est un multiple de p, ainsi $n=2k$: donc n est pair.

Corollaire. Dès qu'on sera arrivé au reste $-m$, on est sûr que la période est paire. Ainsi, le théorème réduit à moitié le calcul des chiffres du quotient et des séries des résidus, lorsque la période est paire, et qu'elle provient d'un dénominateur nombre premier absolu.

Note. La théorie des fractions périodiques a été introduite par Robertson : *Theory of circulation fractions*, Philosoph. Transact., 1764, et ensuite retravaillée par Bernoulli, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1771. Les théorèmes énoncés ci-dessus sont connus depuis longtemps. *Voir* Midy : *De quelques propriétés des nombres*, in-4°, 1835, p. 12. Tm.