

GUSTAVE GUFFLET

Théorème sur les intersections de cercles

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 352-358

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__352_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES INTERSECTIONS DE CERCLES.

PAR M. GUSTAVE GUFFLET,

Elève de l'institution Barbet.

Étant données deux circonférences O et O' (*fig. 30*) dans un même plan, proposons-nous de trouver le lieu géométrique des centres des cercles, qui coupent ces deux circonférences en des points situés aux extrémités d'un même diamètre.

Je prends des axes rectangulaires ; pour origine, le centre O d'un des cercles ; pour axe des x la ligne OO' des centres ; les équations des deux cercles seront alors :

$$(1) \quad x^2 + y^2 = R^2 ; \quad (2) \quad y^2 + (x - d)^2 = R'^2,$$

d étant la distance des deux centres.

Soient α , ϵ les coordonnées d'un point du lieu ; l'équation d'une de ces circonférences sera , en appelant K son rayon :

$$(3) \quad (y - \epsilon)^2 + (x - \alpha)^2 = K^2.$$

Retranchant l'équation (3) successivement de chacune des deux équations (1) et (2), on aura :

$$\begin{aligned} 2\epsilon y + 2\alpha x - \epsilon^2 - \alpha^2 - R^2 + K^2 &= 0 ; \\ 2\epsilon y + 2(\alpha - d)x - \epsilon^2 - \alpha^2 - R'^2 + K^2 &= 0 ; \end{aligned}$$

équations qui représentent précisément les cordes d'intersection de chacun des deux cercles donnés avec la circonférence décrite du point (α, ϵ) comme centre. Exprimons que la première passe par le centre du cercle représenté par l'équation (1), et la seconde par le centre du cercle représenté par l'équation (2). On aura les deux relations :

$$(4) \quad \alpha^2 + \epsilon^2 = K^2 - R^2 ; \quad (5) \quad (\alpha - d)^2 + \epsilon^2 = K^2 - R'^2.$$

Retranchant membre à membre pour éliminer K^2 , on a :

$$a = \frac{d^2 - (R^2 - R'^2)}{2d}.$$

Telle est l'équation du lieu. On voit qu'elle représente une droite perpendiculaire à la ligne des centres.

Actuellement, je remarque que les équations (4) et (5) ne sont autre chose que les équations des deux cercles donnés, dans lesquelles on aurait remplacé R^2 par $K^2 - R^2$ et R'^2 par $K^2 - R'^2$; or, comme en retranchant ces deux équations membre à membre, K^2 disparaît, on peut dire que, pour trouver le lieu cherché, il suffit de retrancher membre à membre les équations des deux cercles, après avoir changé toutefois R^2 en $-R^2$ ou R en $R\sqrt{-1}$.

2. On sait que, pour trouver l'axe radical de deux cercles, il faut retrancher leurs équations l'une de l'autre. Ainsi, si l'on a les trois équations :

$$A = R^2, \quad A' = R'^2, \quad A'' = R''^2;$$

(A, A', A'' représentant les premiers membres qui sont de la forme $(x - x')^2 + (y - y')^2$, y' et x' pouvant être nuls), les équations des axes radicaux seront :

$$(a) \quad A - A' = R^2 - R'^2, \quad A - A'' = R^2 - R''^2, \quad A' - A'' = R'^2 - R''^2;$$

et d'après ce que nous venons de voir, les équations des trois droites qui jouissent de la propriété énoncée dans la question seront :

$$(b) \quad A - A' = R'^2 - R^2, \quad A - A'' = R''^2 - R^2, \quad A' - A'' = R''^2 - R'^2.$$

D'un autre côté, la perpendiculaire élevée sur le milieu de la ligne des centres étant le lieu géométrique des points également distants de ces deux centres, si on désigne par x, y les coordonnées d'un point quelconque de la perpendi-

culaire élevée sur ce milieu de OO'' (fig. 30), par exemple, on aura la relation

$$y^2 + x^2 - (y - b)^2 - (x - a)^2 = 0,$$

a et b étant les coordonnées du point O'' .

Mais cette équation n'est autre que la différence des deux équations des cercles O et O'' dans lesquelles on aurait fait le rayon égal à 0. On conclut de là que, pour avoir les équations des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres, il suffit de faire dans les équations des cercles, $R, R', \dots = 0$, et de retrancher ensuite deux à deux ces équations ainsi modifiées. Ainsi, pour les trois cercles donnés, on aura les trois équations :

$$(c) \quad A - A' = 0, \quad A - A'' = 0, \quad A' - A'' = 0.$$

On sait que les axes radicaux de trois cercles se coupent en un même point, et qu'il en est de même des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres; on voit aussi que les trois droites représentées par les équations (b) se coupent en un même point; car l'une quelconque des équations peut s'obtenir en prenant la différence des deux autres

3. Proposons-nous maintenant de démontrer que ces trois points d'intersection sont en ligne droite, et que le point d'intersection des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres est à égale distance des deux autres.

Supposons $R > R', \quad R' > R''$.

D'après le système d'axes que nous avons choisi, les équations des trois cercles sont :

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= R^2; \\ y^2 + (x - d)^2 &= R'^2; \\ (y - b)^2 + (x - a)^2 &= R''^2. \end{aligned}$$

Pour avoir chaque point d'intersection, il suffit de deux

lignes. Je prendrai donc seulement les deux premières équations de chacun des groupes (a), (b), (c). J'aurai en remplaçant A, A', A'' par leur valeur :

$$\begin{aligned} a' & \begin{cases} 2dx - d^2 = R^2 - R'^2, \\ 2by + 2ax - b^2 - a^2 = R^2 - R''^2. \end{cases} \\ b' & \begin{cases} 2dx - d^2 = R'^2 - R^2, \\ 2by + 2ax - b^2 - a^2 = R''^2 - R^2. \end{cases} \\ c' & \begin{cases} 2x - d = 0, \\ 2by + 2ax - b^2 - a^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si je désigne par x, y les coordonnées du point d'intersection des droites (a'); par $x'y'$ celles du point d'intersection des droites (b') et par $x''y''$ celles du point d'intersection des deux droites (c'), j'aurai :

$$\begin{aligned} x &= \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}; & y &= \frac{d(a^2 + b^2 + R^2 - R''^2) - a(d^2 + R^2 - R'^2)}{2bd}. \\ x' &= \frac{d^2 - R^2 + R'^2}{2d}; & y' &= \frac{d(a^2 + b^2 + R''^2 - R^2) - a(d^2 - R^2 + R'^2)}{2bd}. \\ x'' &= \frac{d}{2}; & y'' &= \frac{a^2 + b^2 - ad}{2b}. \end{aligned}$$

Pour que ces points soient en ligne droite, il faut que l'on ait la relation

$$\frac{y'' - y}{x'' - x} = \frac{y' - y}{x' - x}.$$

Or, si on substitue pour $x, x' \dots$ leurs valeurs, on a :

$$\begin{aligned} \frac{y'' - y}{x'' - x} &= \frac{d(R^2 - R''^2) - a(R^2 - R'^2)}{b(R^2 - R'^2)}, \\ \frac{y' - y}{x' - x} &= \frac{d(R^2 - R''^2) - a(R^2 - R'^2)}{b(R^2 - R'^2)}. \end{aligned}$$

Donc ces trois points sont en ligne droite. De plus, si on prend les différences $x'' - x, x'' - x'$ entre l'abscisse du point d'intersection des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres et les deux autres points, on a :

$$x'' - x' = \frac{R^2 - R'^2}{2d}, \quad x'' - x = \frac{R''^2 - R^2}{2d}.$$

Ces différences sont égales et de signe contraire ; ce qui nous montre que le point d'intersection des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres est à égale distance des deux autres. C. Q. F. D.

Les valeurs de x , x' , x'' n'étant autre chose que les premières équations des trois groupes (a') , (b') , (c') , mises sous une autre forme, nous montrent, en supposant toujours les rayons différents, que l'axe radical de deux cercles est plus près du centre de celui qui est le plus petit, tandis que l'autre droite est plus rapprochée de celui qui est le plus grand ; du reste, ces deux lignes sont à égale distance de la perpendiculaire élevée sur la ligne des centres.

Si nous supposons $R = R' - R''$; alors les équations (a) , (b) , (c) se réduisent au seul groupe (2) ; donc alors l'axe radical, le lieu des centres des cercles qui coupent les deux autres en des points situés aux extrémités d'un même diamètre, se confondent en une seule droite, qui est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la ligne des centres ; ce qui devait être en effet.

4. Proposons-nous maintenant cette question : Étant donné trois cercles extérieurs, en décrire un quatrième qui coupe les trois autres en des points situés aux extrémités d'un même diamètre.

D'après ce que nous venons de voir, il est clair que le centre du cercle cherché n'est autre chose que le point d'intersection des trois lignes représentées par les trois équations (b) , il suffira d'en construire deux, et leur intersection donnera le centre.

On tire de la première :

$$x = \frac{d^2 - (R^2 - R'')}{2d}.$$

Construisons cette valeur ; pour cela je mène O'K (*fig. 30*) perpendiculaire à OO'; du point B comme centre avec OA pour rayon ; je décris un arc de cercle qui la coupe en K. Sur OO' je décris une demi-circonférence ; je porte O'K en O'K', je joins OK' et je prends OD = OK'. Je prolonge OO' d'une quantité O'M = OO'. Je mène K'M ; par le point D, je mène DC parallèle à K'M. Je porte OC en OG, et j'ai OG qui est précisément la valeur de x . Par le point G je mène une perpendiculaire à OO', et GL est la ligne cherchée.

Pour construire l'autre droite, je n'emploierai pas l'équation :

$$2by + 2ax - a^2 - b^2 = R'' - R^2.$$

Je remarque que si j'avais pris la ligne OO'' pour axe des x , j'aurais eu pour x , c'est-à-dire pour la distance de la droite au point O, une valeur qui ne différerait de celle que je viens de construire qu'en ce que d y serait remplacé par d' et R' par R'' . Je construirai donc cette valeur comme j'ai construit la première, et j'aurai ainsi la droite PH. Le point P est donc le centre du cercle cherché. Pour avoir le rayon, je mène PO et QQ' perpendiculaires à PO. Je joins PQ', et si du point P, comme centre avec PQ' pour rayon, je décris un cercle, les points QQ', VV', SS' doivent se trouver aux extrémités d'un même diamètre.

Note. Soient $(x - m)^2 + y^2 = r^2$; $(x - m')^2 + y^2 = r'^2$ les équations des cercles donnés, et $(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = k^2$ l'équation du cercle variable ; on aura :

$$2\beta y + 2x(a - m) = a^2 + \beta^2 - m^2 + r^2 - k^2$$

pour équation de l'axe radical du premier et du troisième cercle.

Si nous représentons par p la distance de cet axe au centre du premier cercle, on aura .

$$[2am - m^2 + k^2 - r^2 - \alpha^2 - \beta^2]^2 = 4p^2[\beta^2 + (m - \alpha)^2].$$

On a d'une manière analogue pour le deuxième et le troisième cercle :

$$[2am' - m'^2 + k^2 - r'^2 - \alpha^2 - \beta^2]^2 = 4p'^2[\beta^2 + (m' - \alpha)^2];$$

p et p' sont des longueurs données.

L'élimination de k donne la relation cherchée entre α et β , ligne du quatrième ordre ; passant aux coordonnées polaires, et faisant $m = 0$, on obtient :

$$2\rho(m' \cos \varphi - p) + e^2 = 4p'^2(\rho^2 - 2d\rho \cos \varphi + m'^2),$$

$$\text{ou} \quad e^2 = r'^2 + m'^2 - r^2;$$

si $p' = 0$, le second axe radical devient un diamètre, et l'équation du lieu est $2\rho(m' \cos \varphi - p) + e^2 = 0$; c'est celle d'une conique qui se réduit à une droite perpendiculaire à l'axe polaire, lorsqu'on a aussi $p = 0$, et alors les deux axes radicaux sont des diamètres ; c'est le cas du problème actuel. On étend facilement le même genre de calcul aux plans radicaux de trois sphères données relativement à une quatrième sphère variable (*V. t. III, p. 101*). Tm.