NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Détermination de la fraction continue périodique à un terme, en fonction du nombre des fractions. D'après M. Clausen (Th.) d'Altona

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 203-204

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__203_0>

DÉTERMINATION

de la fraction continue périodique à un terme, en fonction du nombre des fractions.

D'après M. Clausen (Th.) d'Altona (*Journ. de Crelle*, t. 3, p. 87).

—

Soit la fraction continue $1 : a+1 : a+1 : a+\ldots\ldots$ et n le nombre de ces fractions ; soit $\varphi(n)$ la valeur de cette fraction, on a évidemment $\varphi(n+1)=\dfrac{1}{a+\varphi(n)}$; ou

$$\varphi(n).\,\varphi(n+1)+a\varphi(n+1)=1, \qquad (1)$$

posons :

$$F(n)=\frac{1}{\varphi(n)\varphi(n-1)\varphi(n-2)\ldots\varphi(1)};$$

ainsi l'équation (1) donne $F(n-1)+aF(n)=F(n+1)$.

On satisfait à cette équation en posant $F(n)=K\beta^n$; et on trouve pour déterminer β l'équation $\beta^2-a\beta-1=0$; désignons par β' et β'' les racines de cette équation. Il vient :

$F(n)=K\beta'^n+K'\beta''^n$; or $F(0)=1$; $F(1)=a$; donc

$$1=K+K'$$
$$a=K\beta'+K'\beta''$$

d'où

$$K=\frac{\beta''-a}{\beta''-\beta'}\,;\ K'=\frac{a-\beta'}{\beta''-\beta'};$$

et

$$F(n)=\frac{1}{\beta''-\beta'}\left[(\beta''-a)\beta'^n+(a-\beta')\beta''^n\right];$$

mais :

$$\varphi(n)=\frac{F(n-1)}{F(n)}\,;\ \text{donc}\ \varphi(n)=\frac{(\beta''-a)\beta'^{n-1}+(a-\beta')\beta''^{n-1}}{(\beta''-a)\beta'^n+(a-\beta')\beta''^n}:$$

comme on a $\beta'\beta'' = 1$, il vient :

$$\varphi(n) = \frac{\beta'^{n-2} - \beta''^{n-2} - a(\beta'^{n-1} - \beta''^{n-1})}{\beta'^{n-1} - \beta''^{n-1} - a(\beta'^{n} - \beta''^{n})}. \qquad (3)$$

Cette fonction est symétrique, relativement aux racines β', β'', elle est donc rationnelle en a; et on ne peut avoir $\beta' = \beta''$ à moins que $a = 0$; ce cas est exceptionnel. On a l'équation $\varphi(m+n) = \frac{\varphi(m) + \varphi(n) - a\varphi(m)\varphi(n)}{1 + \varphi(m)\varphi(n)}$; la substitution dans l'équation (3) suffit pour démontrer cette identité.

Note. 1° Les propriétés des fractions continues, comprise celle qu'on vient de lire; 2° les théories des plus grands communs diviseurs, numériques et algébriques; 3° la méthode d'élimination de Bret, pour deux équations à deux inconnues; 4° l'analyse indéterminée du premier et du second degré; 5° la théorie des séries récurrentes; 6° l'intégration de certaines équations aux différences finies, sont des opérations identiques et conséquences immédiates d'un algorithme proposé par Euler, pour exprimer une fraction continue. (*Voir Journal des Mathématiques de M. Liouville.*)

Nous reproduirons ce travail, avec quelques changements dans les Annales. Tm.