

A. VACHETTE

**Valeur de la fraction  $\frac{3.5.9.17...}{2.4.8.16...}$ , le  
numérateur et le dénominateur étant  
des produits indéfinis**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 5  
(1846), p. 188-192

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1846\\_1\\_5\\_188\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_188_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

VALEUR DE LA FRACTION  $\frac{3.5.9.17...}{2.4.8.16...}$

*le numérateur et le dénominateur étant des produits indéfinis.*

**PAR M. A. VACHETTE,**  
licencié ès sciences mathématiques et physiques.

—

Cette fraction peut s'écrire :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \dots$$

Et si on la compare au produit des  $m$  facteurs  $x+a, x+b, x+c, \dots$  dont la valeur est :

$$x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \dots + S_n x^{m-n} + \dots$$

On pourra l'écrire :

$$1 + S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$$

$S_n$  étant la somme de tous les produits  $n$  à  $n$  des facteurs

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

Occupons-nous donc de trouver  $S_n$ .

Le premier de ces produits est :

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdots \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^n};$$

si on remplace alternativement  $\frac{1}{2^n}$  par  $\frac{1}{2^{n+1}}$ ,  $\frac{1}{2^{n+2}}$ , ... puis  $\frac{1}{2^{n-1}}$  par les mêmes facteurs, puis  $\frac{1}{2^{n-2}}$ , ... puis  $\frac{1}{2}$ ; on aura tous les produits où entrent  $n-1$  des  $n$  premiers facteurs, avec le premier produit où ils entrent tous. Désignons par  $s$  la somme de ces produits.

Si on prend le produit des  $n$  facteurs qui suivent le premier produit, il est égal à  $p \times \frac{1}{2^n}$ ; si on y remplace  $\frac{1}{2^{n+1}}$  alternativement par  $\frac{1}{2^{n+2}}$ ,  $\frac{1}{2^{n+3}}$ , ... puis  $\frac{1}{2^n}$  par les mêmes facteurs, puis  $\frac{1}{2^{n-1}}$ , ... puis  $\frac{1}{2^2}$ , on aura les mêmes produits que dans la somme  $s$ , multipliés chacun par  $\frac{1}{2^n}$ ; ce sont tous les produits où entrent  $n-1$  des  $n$  facteurs qui suivent le premier. La somme de ces produits est  $s \cdot \frac{1}{2^n}$ .

En continuant de même on obtiendra une 3<sup>e</sup> somme égale à  $s \cdot \frac{1}{2^{2n}}$ , une 4<sup>e</sup> égale à  $s \cdot \frac{1}{2^{3n}}$ , ... et ainsi de suite à l'infini.

Donc la somme totale

$$S_n = s \left( 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + \dots \right) = s \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = s \frac{2^n}{2^n - 1}$$

Il ne s'agit plus que de trouver  $s$ . Cette somme  $s$  est composée des  $n$  sommes partielles

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdots \frac{1}{2^{n-1}} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots \right) = \frac{1}{2^{1+2+\dots+(n-1)}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$s_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdots \frac{1}{2^{n-3}} \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots \right) \frac{1}{2^n}$$

$$s_{n-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdots \frac{1}{2^{n-3}} \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots \right) \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^n}$$

.....

$$s_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots \right) \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^4} \cdots \frac{1}{2^n}$$

$$s_1 = \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots \right) \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdots \frac{1}{2^n}$$

A partir de  $s_{n-1}$ , toutes les sommes ont un facteur commun entre parenthèses ; et pour passer de la somme  $s_{n-k}$  à la somme  $s_{n-k-1}$  il faudra supprimer avant la parenthèse le facteur  $\frac{1}{2^{n-k-1}}$ , introduire après la parenthèse le facteur

$$\frac{1}{2^{n-k+1}} ; \text{ ce qui donne définitivement } s_{n-k-1} = \frac{1}{2^2} \cdot s_{n-k}. \text{ Donc}$$

on aura :

$$s_{n-1} + s_{n-2} + \dots + s_1 = s_{n-1} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2(n-2)}} \right)$$

$$\text{Or } s_{n-1} = \frac{1}{2^{1+2+3+\dots+(n-2)}} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n + \frac{(n-1)(n-2)}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{2n^2+n-2}{2}}}$$

$$s_{n-1} + s_{n-2} + \dots + s_1 = \frac{2^{2(n-1)} - 1}{2^{\frac{2n^2+5n-4}{2}}}$$

$$s = \frac{1}{2^{\frac{2n^2+n-2}{2}}} + \frac{2^{2(n-1)} - 1}{2^{\frac{2n^2+5n-4}{2}}} = \frac{2^{2n-1} + 2^{2(n-1)} - 1}{2^{\frac{2n^2+5n-4}{2}}} = \frac{3 \cdot 2^{2(n-1)} - 1}{2^{\frac{2n^2+5n-4}{2}}}$$

$$S_n = \frac{3 \cdot 2^{2(n-1)}}{(2^n - 1) 2^{\frac{2n^2+3n-4}{2}}}$$

et pour  $n = 1$  on trouve  $S_1 = 1$  ce que devait être.

La somme cherchée est donc :

$$\begin{aligned}
 & 2 + \frac{3 \cdot 2^3 - 1}{3 \cdot 2^3} + \frac{3 \cdot 2^4 - 1}{7 \cdot 2^7} + \frac{3 \cdot 2^5 - 1}{15 \cdot 2^{15}} + \frac{3 \cdot 2^8 - 1}{31 \cdot 2^{16}} + \dots \\
 & = 2 + 3 \left( \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{15 \cdot 2^9} + \frac{1}{31 \cdot 2^{16}} + \frac{1}{63 \cdot 2^{15}} + \dots \right) \\
 & - \left( \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} + \frac{1}{31 \cdot 2^{16}} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

et elle est convergente; car chacune des parenthèses a ses termes respectivement moindres que ceux d'une progression par quotient décroissante à l'infini.

Il est clair qu'au lieu de  $\frac{1}{2}$ , on pourrait avoir la fraction  $\frac{1}{q}$ ,  $q$  étant plus grand que 1; on aurait des formules tout à fait semblables aux précédentes.

$$S_n = \frac{(q+1) q^{2(n-1)} - 1}{(q^n - 1) q^{\frac{n^2+3n-4}{2}}}$$

*Note.* Ce problème se rattache à la théorie qu'Euler a créée pour la partition des nombres (*Introd. in analys.* t. II, p. 258); voici sa marche.

Soit :

$$\begin{aligned}
 Z &= (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z) \dots (1+x^4z) \dots \\
 &= 1 + P_1 z + P_2 z^2 + P_3 z^3 + \dots + P_n z^n + \dots
 \end{aligned}$$

$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  sont des fonctions de  $x$  seulement qu'il s'agit de déterminer; changeons  $z$  en  $xz$ , il vient :

$$Z_1 = \frac{Z}{1+xz} = 1 + P_1 xz + P_2 x^2 z^2 + \dots + P_n x^4 z^n$$

ou

$$1 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots = (1+xz)(1 + P_1 xz + P_2 x^2 z^2 + \dots)$$

La théorie des coefficients donne :

$$P_1 = \frac{x}{1-x}; \quad P_2 = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}; \quad P_n = \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots (1-x^n)};$$

faisons  $x = \frac{1}{q}$  ;  $q > 1$  ; il vient :

$$\left(1 + \frac{z}{q}\right) \left(1 + \frac{z}{q^2}\right) \left(1 + \frac{z}{q^3}\right) \dots = 1 + \frac{z}{q-1} + \frac{z^2}{(q-1)(q^2-1)} + \dots + \frac{z^n}{(q-1) \dots (q^n-1)} + \dots$$

série convergente ; en effet  $P_{n+1} = P_n \frac{z}{q^{n+1}-1}$  ; or , lorsque

$$\frac{z}{q^{n+1}-1} < \frac{1}{2} ; \text{ ou } q^{n+1} > 2z + 1 ,$$

un terme devient plus petit que la moitié du précédent.

Faisons  $z = 1$  ;  $q = 2$  , on obtient :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.7} + \frac{1}{1.3.7.15} + \frac{1}{1.3.7.15.31} + \frac{1}{1.3.7.15.31.63} \dots$$

Ce développement diffère de celui qu'on a trouvé ci-dessus par la méthode combinatoire. La valeur est comprise entre 2 et  $2\frac{2}{5}$ , il suffit de comparer avec la progression  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{108} \dots$

On sait que les coefficients du développement de la fraction

rationnelle  $\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)}$ , indiquent de combien

de manières on peut décomposer le nombre  $n$  en parties, par voie d'addition.

Le produit de tous les nombres impairs divisé par tous les nombres pairs, donne le quotient fini  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$  (Wallis).

Si on efface parmi tous les nombres pairs les puissances de 2, et parmi les nombres impairs ces puissances augmentées d'une unité, le reste est encore un quotient fini compris entre

$$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{et} \quad \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{Tm.}$$