

WOESTYN

VAUQUELIN

Solution analytique du problème 103

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 147-151

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__147_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME 103.

(t. IV , p. 560 et t. V , p. 127).

PAR MM. WOESTYN ET VAUQUELIN ,

Elèves de l'École normale.

Un angle constant étant circonscrit à une courbe plane géométrique, la tangente au lieu géométrique du sommet, menée par un des sommets est aussi tangente au cercle qui passe par ce sommet et les deux points de contact correspondants.

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe plane donnée, qu'on sache ou non trouver cette équation. Nous supposons d'ailleurs les axes dans une position quelconque, mais rectangulaire.

Soient x', y' ; x'', y'' les coordonnées de deux points A et B de la courbe donnée. On a les équations :

$$\left. \begin{aligned} y' &= f'(x') \\ y'' &= f'(x'') \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

De plus soient AM, BM (*fig. 19*) les tangentes à la courbe donnée aux points A et B, et soit AMB l'angle constant de ces tangentes; on a, en désignant par x, y les coordonnées du point M, les relations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{y - y'}{x - x'} &= f'(x') \\ \frac{y - y''}{x - x''} &= f'(x'') \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Et en désignant par m la tangente de l'angle AMB :

$$m = \frac{f'(x'') - f'(x')}{1 + f'(x')f'(x'')},$$

ou

$$m + mf'(x')f''(x'') = f'(x'') - f''(x'). \quad (1)$$

Les équations (b) deviennent en chassant les dénominateurs, et en ayant égard aux équations (a) :

$$f'(x')(x-x') = y - f(x'), \quad (2)$$

$$f'(x'')(x-x'') = y - f(x''). \quad (3)$$

En éliminant x' et x'' entre les équations (1), (2), (3), on aurait une relation entre x et y qui serait le lieu géométrique des points M, et de cette relation on pourrait tirer le coefficient angulaire de la tangente MT. Ce coefficient est, comme on sait, $\frac{dy}{dx}$, x étant la variable indépendante, et y la fonction de x donnée par l'équation du lieu des points M. Cette équation ne pourra en général s'obtenir que quand on connaîtra la forme de la fonction (f), mais on peut calculer $\frac{dy}{dx}$ sans connaître cette équation.

En effet, au moyen des équations (1), (2), (3), chacune des quantités x' , x'' , y peut être considérée comme fonction de la variable indépendante x ; car trois équations entre trois inconnues suffisent en général pour déterminer chacune de ces inconnues. On peut prendre les dérivées de chaque membre des équations (1), (2), (3) sous ce point de vue, et exprimer que la dérivée du premier membre égale celle du second.

L'équation (1) donne :

$$\begin{aligned} mf''(x'')f''(x')\frac{dx'}{dx} + mf''(x')f''(x'')\frac{dx''}{dx} &= \\ &= f''(x'')\frac{dx''}{dx} - f''(x')\frac{dx'}{dx}, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{dx'}{dx} f''(x') [mf''(x'') + 1] + \frac{dx''}{dx} f''(x'') [mf''(x') - 1] = 0.$$

En remplaçant m par sa valeur, les binômes

$$mf''(x'') + 1, \quad mf'(x') - 1,$$

deviennent respectivement

$$\frac{1 + (f'(x''))^2}{1 + f'(x')f'(x'')}; \quad - \frac{1 + [f'(x')]^2}{1 + f'(x')f'(x'')}.$$

De sorte que l'équation précédente devient :

$$\frac{dx'}{dx} f''(x') [1 + (f'(x'))^2] - \frac{dx''}{dx} f''(x'') [1 + f'(x')^2] = 0. \quad (4)$$

L'équation (2) donne .

$$f''(x') \frac{dx'}{dx} (x - x') + f'(x') \left(1 - \frac{dx'}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} - f'(x') \frac{dx'}{dx}$$

d'où

$$f''(x') \frac{dx'}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx} - f'(x')}{x - x'}.$$

L'équation (3) donne de la même manière .

$$f''(x'') \frac{dx''}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx} - f'(x'')}{x - x''}.$$

Portant ces valeurs dans (4), on a :

$$\frac{\frac{dy}{dx} - f'(x')}{x - x'} \left\{ 1 + [f'(x'')]^2 \right\} - \frac{\frac{dy}{dx} - f'(x'')}{x - x''} \left\{ 1 + f'(x')^2 \right\} = 0;$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} \left\{ (x - x'') [1 + [f'(x'')]^2] - (x - x') [1 + f'(x')^2] \right\} = \\ & = (x - x'') f'(x') [1 + f'(x'')]^2 - (x - x') f'(x'') [1 + f'(x')^2]. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x - x'') f'(x') [1 + f'(x'')]^2 - (x - x') f'(x'') [1 + f'(x')^2]}{(x - x'') [1 + f'(x'')]^2 - (x - x') [1 + f'(x')^2]} = \\ &= \frac{(x - x'') f'(x') [1 + f'(x'')]^2 - (x - x') f'(x'') [1 + f'(x')^2]}{(x - x'') [f'(x'')]^2 - (x - x') [f'(x')^2] + x' - x} \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'avoir le coefficient angulaire de la tangente au cercle au point M.

Pour cela C étant le centre du cercle, il faut chercher le coefficient angulaire de la droite CM.

Pour avoir les coordonnées du centre, il suffit de prendre le point d'intersection des deux lignes EC, DC menées perpendiculairement aux droites MA et MB en leurs milieux.

Les équations de ces normales sont :

$$Y - \beta = -\frac{1}{f'(x')} (X - z), \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{x + x'}{2}; \beta = \frac{y + y'}{2}; \\ \alpha' = \frac{x + x''}{2}; \beta' = \frac{y + y''}{2}. \end{array} \right.$$

Les équations de ces normales donnent par leur combinaison, les coordonnées du point C, on a successivement :

$$f'(x') Y + X = \beta f'(x') + \alpha,$$

$$f'(x'') Y + X = \beta' f'(x'') + \alpha',$$

$$Y [f'(x'') - f'(x')] = \beta' f'(x'') - \beta f'(x') + \alpha' - \alpha,$$

$$X [f'(x'') - f'(x')] = (\beta - \beta') f'(x') f'(x'') + \alpha f'(x'') - \alpha' f'(x').$$

Le coefficient angulaire de CM étant $\frac{Y - y}{X - x}$,

On tire des deux équations précédentes le rapport :

$$\begin{aligned} \frac{Y - y}{X - x} &= \frac{\beta' f'(x'') - \beta f'(x') + \alpha' - \alpha - y [f'(x'') - f'(x')]}{(\beta - \beta') f'(x') f'(x'') + \alpha f'(x'') - \alpha' f'(x') - x [f'(x'') - f'(x')]} \\ &= \frac{(\beta' - y) f'(x'') - (\beta - y) f'(x') + \alpha' - \alpha}{(\beta - \beta') f'(x') f'(x'') + (\alpha - x) f'(x'') - (\alpha' - x) f'(x')} \end{aligned}$$

Or

$$\beta - \beta' = \frac{y' - y''}{2}, \quad \alpha - \alpha' = \frac{x' - x''}{2}, \quad \alpha - x = \frac{x' - x}{2}, \quad \alpha' - x = \frac{x'' - x}{2},$$

$$\beta - y = \frac{y' - y}{2}, \quad \beta' - y' = \frac{y'' - y}{2}.$$

Ainsi :

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{(y'' - y) f'(x'') - (y' - y) f'(x') + (x'' - x')}{(y' - y'') f'(x') f'(x'') + (x' - x) f'(x'') - (x'' - x) f'(x')}.$$

En se rappelant que $y' = f'(x')$ et que $y'' = f'(x'')$, les équations (2) et (3) donnent :

$$y - y' = f'(x')(x - x'); \quad y - y'' = f'(x'')(x - x''); \\ y' - y'' = f'(x'')(x - x'') - f'(x')(x - x').$$

d'où

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{-f'(x'')^2(x - x'') + f'(x')^2(x - x') + x'' - x'}{(x - x'')f'(x')[1 + f'(x'')^2] - (x - x')f''(x)[1 + f'(x')^2]}.$$

Or, la tangente au cercle étant perpendiculaire au rayon, le coefficient angulaire de cette tangente sera :

$$\frac{(x - x'')f'(x')[1 + f'(x'')^2] - (x - x')f''(x)[1 + f'(x')^2]}{(x - x'')f'(x'')^2 - f'(x')^2(x - x') + x' - x''};$$

valeur précisément égale à celle de $\frac{dy}{dx}$, trouvée précédemment. Ainsi, le théorème est démontré.