HENRI D'ANDRÉ

Démonstration du théorème 55 sur le binôme de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 121-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__121_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 55 (t. I, p. 521),

sur le binôme de Newton.

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

THÉORÈME. L'exposant du binôme de Newton étant de la forme $a^p - 1$ où a est un nombre premier et p un nombre entier positif quelconque, aucun coefficient du binôme n'est divisible par a ; si l'exposant est a^p, tous les coefficients, les deux extrêmes exceptés, sont divisibles par a.

Démonstration. 1[er] *cas.* Le coefficient du terme général d'un tel binôme est évidemment $\frac{(a^p-1)(a^p-2)\ldots.(a^p-n)}{1\,.\,2\,.\,3\quad\ldots.\quad n}$, nombre essentiellement entier. a étant un nombre premier, il est nécessaire de considérer seulement les facteurs divisibles par a.

Soit ka^r ou $k < a$ un des facteurs du dénominateur ; il existe dans le numérateur un facteur correspondant a^p-ka^r; les deux facteurs sont donc divisibles par a^r et donnent des quotients non divisibles par a ; ôtant donc, haut et bas, les diviseurs a, on parvient au nombre entier $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, où ni le dividende, ni le diviseur ne contiennent comme facteur le nombre premier a ; donc ce nombre entier n'est pas divisible par a. C. Q. F. D.

2[e] *cas.* Le coefficient du terme général est :

$$\frac{a^p.\,a^p-1\ \ldots.\ a^p-n+1}{1.2.3\ \ldots.\ n}=\frac{a^p.\,a^p-1\ \ldots.\ a^p-n}{a^p-n.1.2\ \ldots.\ n}=\frac{\mathrm{L}a^p}{a^p-n};$$

or on vient de démontrer que L ne contient pas le facteur a, et a^p-n ne contient jamais autant de fois le diviseur a que a^p ; donc ce terme est divisible par a.